



전달질량계수법을 이용한 2차원 곡선 보의 과도상태 응답해석 Transient State Response Analysis of Two Dimensional Curved Beam using Transfer Mass Coefficient Method

최명수*† · 양경욱*

Myung-Soo Choi*† and Kyong-Uk Yang*

(Received 22 April 2019, Revision received 24 June 2019, Accepted 24 June 2019)

Abstract: Transient state response analyses of mechanical and structural systems play very important role in preventing the damages by the sudden loadings or the change of operating condition. Recently, the modal analysis method and the direct integral method (DIM) based on the finite element analysis have been used mainly for analyzing the transient state responses of mechanical and structural systems. However, these methods requires much computational time and large computer storage when analyzing accurately the transient state responses of the systems. In this paper, the authors fomulate the algorithm for analyzing the transient state responses of a two dimensional curved beam with a lot of degree-of-freedom by using the transfer mass coefficient method (TMCM). After the authors made the computational programs calculating the transient state response of the curved beam by using the TMCM and the DIM respectively, the transient response analyses for three computational models were performed by the two programs. From the computational results, we proved that the TMCM is the very rapid and accurate method in spite of using small computer storage in the transient response analysis of the curved beam.

Key Words : Transient State, Curved Beam, Newmark Method, Transfer Mass Coefficient Method, Direct Integration Method

— 기 호 설 명 —

f_i : 절점 i 의 힘벡터

d_i : 절점 i 의 변위벡터

v_i : 절점 i 의 속도벡터

a_i : 절점 i 의 가속도벡터

J_i : 절점 i 의 질량계수행렬

b_i : 절점 i 의 힘보정벡터

M_i^e : i 번째 곡선 보요소의 질량행렬

C_i^e : i 번째 곡선 보요소의 감쇠행렬

*† 최명수(ORCID:https://orcid.org/0000-0003-0691-5570) :

교수, 전남대학교 해양기술학부

E-mail : engine@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7137

*양경욱(ORCID:https://orcid.org/0000-0003-0416-8348) :

교수, 전남대학교 해양기술학부

*† Myung-Soo Choi(ORCID:https://orcid.org/0000-0003-0691-

5570) : Professor, Faculty of Marine Technology, Chonnam National University.

E-mail : engine@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7137

*Kyong-Uk Yang(ORCID:https://orcid.org/0000-0003-0416-834-

8) : Professor, Faculty of Marine Technology, Chonnam National University.

- K_i^e : i 번째 곡선 보요소의 강성행렬
- \hat{K}_i : 절점 i 의 기초지지요소의 강성행렬
- \hat{C}_i : 절점 i 의 기초지지요소의 감쇠행렬
- \hat{q}_i : 절점 i 의 외력벡터
- R : 곡선 보의 반경
- Δt : 해석상의 시간 간격

그리스 문자

- α : 곡선 보의 열림각
- β, γ : 뉴마크법의 파라메타
- η : 구조 감쇠비

하첨자

- i : 절점 번호 또는 요소 번호

1. 서 론

기계 및 구조물을 설계할 때, 강도 해석, 자유 진동 해석, 정상상태 응답해석 그리고 과도상태 응답해석은 기계 및 구조물의 안정성을 확보하는 차원에서 무척 중요하다. 이 중에서도 과도상태 응답해석은 기계의 시동 및 갑작스런 운전 조건의 변화 시에 나타날 수 있는 다양한 손상을 사전에 예측하여 피해를 막는데 큰 역할을 한다.

곡선 보는 기계 및 구조물의 설계에 즐겨 사용되는 중요한 부분이다. 현재 과도응답을 해석할 경우, 가장 많이 사용되는 방법이 유한요소해석을 기반으로 한 모드해석법¹⁾과 직접적분법²⁾이다. 그러나 이 방법들은 곡선 보에 대한 고정도의 과도응답 해석 결과가 필요할 경우, 모델링 시에 곡선 보를 많은 수의 곡선 보 요소로 분할해야 하며, 그 결과 계산 시에 많은 시간과 메모리를 요구하여 곡선 보의 과도응답을 해석하는 설계자나 연구자에게 적지 않은 부담을 줄 수 있다.

이 논문에서 저자들은 전달질량계수법³⁾을 이용하여 2차원 곡선 보의 과도상태 응답을 구할 수 있는 전산 알고리즘을 제시한다. 그리고 2차원 곡

선 보에 해당하는 3가지 수치계산 모델을 선정하고, 전달질량계수법과 직접적분법을 기반으로 한 전산 프로그램으로 계산모델에 대한 과도상태 응답을 계산하고, 양 방법의 계산 결과 및 계산에 소요된 시간 등을 비교·검토한다.

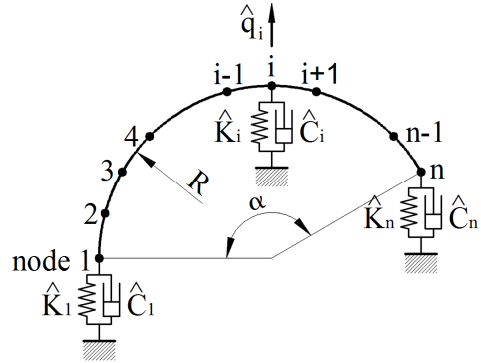


Fig. 1 Analytical model

2. 과도상태 응답해석 알고리즘

Fig. 1에 나타난 2차원 곡선 보를 해석모델로 선정하여, 전달질량계수법³⁾으로 과도상태 응답을 계산하는 전산 알고리즘을 기술한다.

2.1 곡선 보의 모델링

곡선 보는 질량, 강성, 그리고 내부 감쇠를 가지며, Fig. 1에 나타난 것처럼 다수의 기초지지 스프링(\hat{K})과 점성 감쇠기(\hat{C})로 기초로부터 지지되며 외력(\hat{q})을 받고 있다.

해석 모델에서 곡선 보의 시작단과 끝단, 곡선 보요소의 결합점, 곡선 보와 기초지지 스프링 및 감쇠기와 결합점, 곡선 보에서 외력이 작용하는 점의 위치를 모두 절점으로 지정하고, 시작단에서 끝단까지 모든 절점을 순차적으로 절점 1, 절점 2, ..., 절점 n 이라 부른다.

해석 대상이 2차원 곡선 보이므로, 곡선 보의 면내 해석을 위해 모든 절점은 곡선 보의 접선 방향, 반경 방향, 회전방향의 3자유도를 가진다. 각 절점의 변위벡터($d = \{u, w, \theta\}$)는 크기가 3×1 이고, 접선방향 변위(u), 반경방향 변위(w), 회전방

향 각변위(θ)로 구성된다. 각 절점의 힘벡터 ($\mathbf{f} = \{f_u, f_w, M\}$)는 크기가 3×1 이고, 접선방향 힘(f_u), 반경방향 힘(f_w), 모멘트(M)로 구성된다.

절점에 부착된 기초지지 스프링($\hat{\mathbf{K}}$)은 접선, 반경, 회전 방향의 스프링으로 구성되며, 이들의 스프링상수는 각각 $\hat{k}_u, \hat{k}_w, \hat{K}$ 이다. 절점에 부착된 기초지지 점성 감쇠기($\hat{\mathbf{C}}$)는 접선, 반경, 회전 방향의 감쇠기로 구성되며, 이들의 감쇠계수는 각각 $\hat{c}_u, \hat{c}_w, \hat{C}$ 이다. 외력($\hat{\mathbf{q}}$)도 접선, 반경, 회전 방향의 외력으로 구성되며, 이들의 방향별 진폭은 각각 $\hat{q}_u, \hat{q}_w, \hat{Q}$ 이다.

2.2 질량계수행렬 및 힘보정벡터의 정의

절점의 힘벡터(\mathbf{f}_i)와 가속도벡터(\mathbf{a}_i) 사이의 관계를 식 (1) 및 식 (2)로 정의한다.

$$\bar{\mathbf{f}}_i(t) = \bar{\mathbf{J}}_i \mathbf{a}_i(t) + \bar{\mathbf{b}}_i(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_i(t) = \mathbf{J}_i \mathbf{a}_i(t) + \mathbf{b}_i(t) \quad (2)$$

여기서 \mathbf{J}_i 및 \mathbf{b}_i 를 질량계수행렬 및 힘보정벡터라고 한다. 그리고 동일 기호 위에 ‘-’를 붙인 것을 절점의 좌측을 의미하고, 붙이지 않은 것을 절점의 우측을 뜻한다.

2.3 질량계수행렬 및 힘보정벡터의 전달

해석 모델은 다수의 곡선 보요소와 기초지지 스프링과 감쇠기 그리고 외력으로 구성된다.

기초지지 스프링과 감쇠기가 부착되고 외력을 받고 있는 절점 i 에서 질량계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식은

$$\mathbf{J}_i = \bar{\mathbf{J}}_i + \gamma \Delta t \hat{\mathbf{C}}_i + \beta (\Delta t)^2 \hat{\mathbf{K}}_i \quad (3)$$

$$\mathbf{b}_i(t) = \bar{\mathbf{b}}_i(t) - \hat{\mathbf{q}}_i(t) + \hat{\mathbf{C}}_i \mathbf{z}_i(t - \Delta t) + \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{y}_i(t - \Delta t) \quad (4)$$

여기서 β 와 γ 는 뉴마크법²⁾의 파라메타로서 이 연구에서는 0.25와 0.5를 사용한다.

$$\hat{\mathbf{C}}_i = \begin{bmatrix} \hat{c}_u & 0 & 0 \\ 0 & \hat{c}_w & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_i \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}}_i = \begin{bmatrix} \hat{k}_u & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_w & 0 \\ 0 & 0 & \hat{K}_i \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{q}}_i(t) = \begin{bmatrix} \hat{q}_u(t) \\ \hat{q}_w(t) \\ \hat{Q}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_i(t - \Delta t) = \mathbf{d}_i(t - \Delta t) + \Delta t \mathbf{v}_i(t - \Delta t) + (0.5 - \beta)(\Delta t)^2 \mathbf{a}_i(t - \Delta t), \quad (5)$$

$$\mathbf{z}_i(t - \Delta t) = \mathbf{v}_i(t - \Delta t) + (1 - \gamma)\Delta t \mathbf{a}_i(t - \Delta t)$$

절점 i 와 절점 $i+1$ 사이에 있는 i 번째 곡선 보요소에서 질량계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식은

$$\bar{\mathbf{J}}_{i+1} = \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{H}_i + \bar{\mathbf{D}}_i \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{b}}_{i+1}(t) = \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{e}_i(t) + \bar{\mathbf{w}}_{i+1}(t - \Delta t) \quad (7)$$

여기서

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_i & \bar{\mathbf{B}}_i \\ \bar{\mathbf{C}}_i & \bar{\mathbf{D}}_i \end{bmatrix} = \mathbf{M}_i^e + \gamma \Delta t \mathbf{C}_i^e + \beta (\Delta t)^2 \mathbf{K}_i^e,$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{w}_i(t) \\ \bar{\mathbf{w}}_{i+1}(t) \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_i^e \begin{Bmatrix} \mathbf{z}_i(t) \\ \mathbf{z}_{i+1}(t) \end{Bmatrix} + \mathbf{K}_i^e \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_i(t) \\ \mathbf{y}_{i+1}(t) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{G}_i \bar{\mathbf{B}}_i, \quad \mathbf{G}_i = -(\mathbf{J}_i + \bar{\mathbf{A}}_i)^{-1}, \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_i(t) = \mathbf{G}_i \{\mathbf{w}_i(t - \Delta t) + \mathbf{b}_i(t)\},$$

$$\mathbf{C}_i^e = \eta \mathbf{K}_i^e$$

$\mathbf{M}_i^e, \mathbf{C}_i^e, \mathbf{K}_i^e$ 는 i 번째 곡선 보요소의 질량, 감쇠, 강성행렬이고⁴⁾, η 는 구조 감쇠비이다.

2.4 변위, 속도, 가속도 계산

좌단에 해당하는 절점 1의 질량계수행렬(\mathbf{J}_1) 및 힘보정벡터(\mathbf{b}_1)는 다음 식과 같다.

$$\mathbf{J}_1 = \gamma \Delta t \hat{\mathbf{C}}_1 + \beta (\Delta t)^2 \hat{\mathbf{K}}_1 \quad (9)$$

$$\mathbf{b}_1(t) = \hat{\mathbf{C}}_1 \mathbf{z}_1(t - \Delta t) + \hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{y}_1(t - \Delta t) - \hat{\mathbf{q}}_1(t) \quad (10)$$

식 (9)를 시작으로 식 (3)과 식 (6)을 순차적으로 적용하면 최종적으로 마지막 절점인 절점 n 우

측의 질량계수행렬(J_n)을 구할 수 있다. 힘보정벡터도 식 (10)을 시작으로 식 (4)와 식 (7)을 순차적으로 적용하면 절점 n 우측의 힘보정벡터(b_n)를 구할 수 있다.

마지막 절점의 질량계수행렬과 힘보정벡터로부터 아래 식과 같이 마지막 절점의 가속도벡터를 구할 수 있고,

$$a_n(t) = -(J_n)^{-1} b_n(t) \quad (11)$$

나머지 절점의 가속도벡터는 식 (12)로부터 a_{n-1} , a_{n-2} , ..., a_1 의 순서로 구한다.

$$a_i(t) = H_i a_{i+1}(t) + e_i \quad (12)$$

시간 t 에서 가속도벡터를 알고 있으면, 시간 t 에서의 변위벡터와 속도벡터는 뉴마크법²⁾으로부터 다음 식과 같이 구할 수 있다.

$$d_i(t) = \beta(\Delta t)^2 a_i(t) + y_i(t - \Delta t), \quad (13)$$

$$v_i(t) = \gamma \Delta t a_i(t) + z_i(t - \Delta t)$$

여기서 $y_i(t - \Delta t)$ 및 $z_i(t - \Delta t)$ 는 식 (5)에 기술되어 있다.

3. 수치 계산 결과 및 검토

저자들은 전달질량계수법으로 2차원 곡선 보의 과도상태 응답을 해석하는 전산 프로그램을 개발하였다. 그리고 해석 결과의 신뢰성을 확인하기 위하여 기존의 직접적분법으로 동일한 해석이 가능한 전산 프로그램을 만들었다. 사용한 언어는 FORTRAN 90이고, 퍼스널 컴퓨터(Intel Core i7-2600 CPU @ 3.40 GHZ, 8.00 GB RAM, 64 bit Operating System)상에서 수치 계산을 하였다.

계산 모델은 반원 곡선 보와 1/4 원호 곡선보인데 이러한 모델을 채택하게 된 주된 이유는 이들 모델은 선행 연구^{4,5)}를 통해 이미 자유진동 해

석 및 정적해석을 수행한 바 있으므로 그 결과인 고유진동수와 정적 변위를 이 연구의 결과인 과도상태 응답과 비교하기 위해서이다.

3.1 양단 고정인 반원 곡선 보

Fig. 2에 나타낸 계산모델 I은 반경이 0.4 m이고, 열림각이 180도, 경계조건은 양단 고정인 반원 곡선 보이다. 곡선 보의 단면은 파이프 형(외경 1 cm, 내경 0.8 cm)이고, 탄성계수는 200 GPa, 밀도는 7850 kg/m³이다. 곡선 보를 400개의 곡선 보 요소로 모델링하고, 곡선 보의 구조 감쇠비는 0.1%, 외력은 곡선 보의 한 가운데 절점에 X축 방향으로 진폭 1 N의 정현파 하중이 작용하는 것으로 설정하였다.

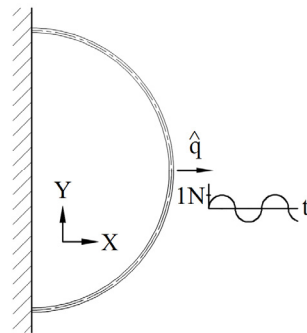


Fig. 2 Computational model I

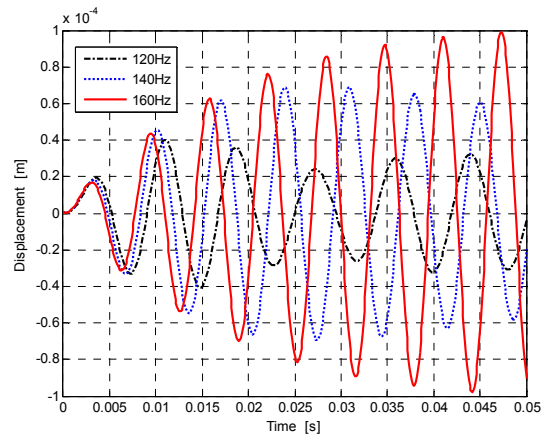


Fig. 3 Response of model I by TMCM

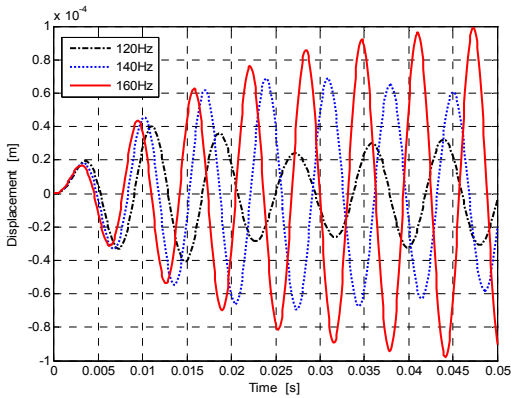


Fig. 4 Response of model I by DIM

외력의 진동수가 120 Hz, 140 Hz, 160 Hz일 때, 곡선 보 중앙점의 X축 방향 과도응답을 전달질량계수법으로 계산한 결과가 Fig. 3이고, 직접적분법으로 계산한 결과가 Fig. 4이다. 그림 상으로 두 방법의 결과는 완전히 일치하였다.

참고문헌⁴⁾에 제시된 계산모델 I의 고유진동수는 154.8 Hz였다. Fig. 3과 Fig. 4를 살펴보면 정현과 외력의 진동수가 고유진동수에 가까워질수록 진폭이 점점 커지고 있음을 확인할 수 있었다.

3.2 점성 감쇠기를 갖는 양단 고정인 반원 곡선 보

Fig. 5에 나타난 계산모델 II는 계산모델 I의 한 가운데 절점에 X축 방향의 점성 감쇠기가 추가된 것이다. 점성 감쇠기의 감쇠계수가 0, 10, 20, 50 Ns/m이고, X축 방향으로 진폭 1 N, 진동수 160 Hz의

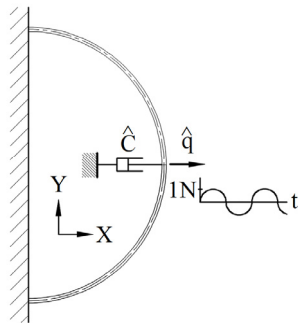


Fig. 5 Computational model II

정현과 하중이 작용하는 것으로 설정하였다.

점성 감쇠기의 감쇠계수가 0, 10, 20, 50 Ns/m 일 때, 곡선 보 중앙점의 X축 방향 과도응답을 전달질량계수법으로 계산한 결과가 Fig. 6이고, 직접적분법으로 계산한 결과가 Fig. 7이다. 그림 상으로 두 방법의 결과는 완전히 일치하였다.

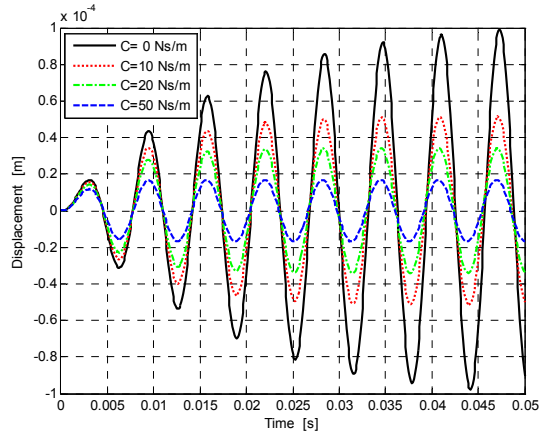


Fig. 6 Response of model II by TMCM

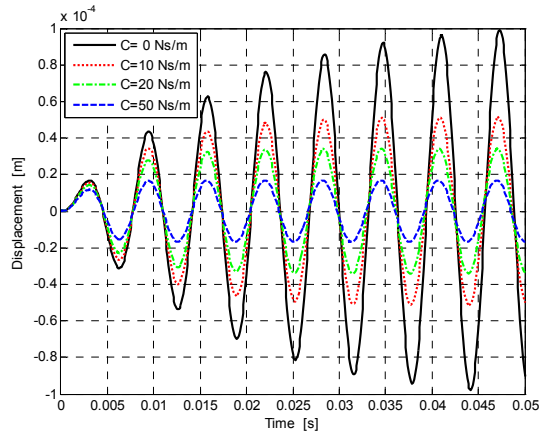


Fig. 7 Response of model II by DIM

3.3 한단 고정인 1/4 원호 곡선 보

Fig. 8에 나타난 계산모델 III는 반경이 10.719 cm이고, 열림각이 90도, 경계조건이 고정-자유인 1/4 원호 곡선 보이다. 곡선 보의 단면은 직사각형 (단면 폭 2.54 mm, 높이 0.508 mm)이고, 탄성계수는 68.94 GPa, 밀도는 2,700 kg/m³이다. 곡선 보

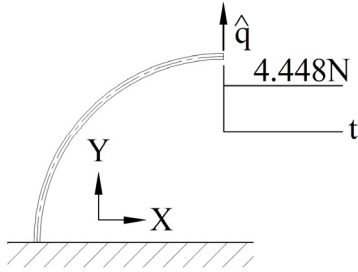


Fig. 8 Computational model III

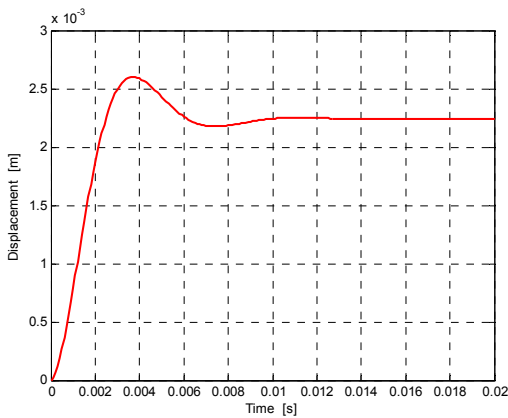


Fig. 9 Response of model III by TCM

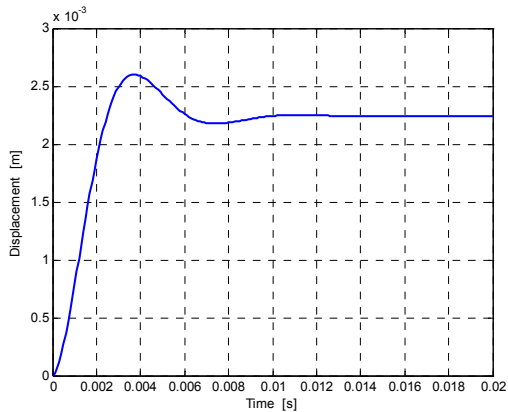


Fig. 10 Response of model III by DIM

의 구조 감쇠비는 0.1%, 외력은 곡선 보의 자유단에 Y축 방향으로 진폭 4.448 N의 스텝하중이 작용하는 것으로 설정하였다.

곡선 보를 400개의 보 요소로 모델링하여 곡선 보 자유단의 Y축 방향 과도응답을 전달질량계수

법으로 계산한 결과가 Fig. 9이고, 직접적분법으로 계산한 결과가 Fig. 10이다. 그림 상으로 두 방법의 결과는 완전히 일치하였다.

양 방법의 계산 결과를 좀 더 정확히 비교하기 위해 시간별 응답을 Table 1에 나타내었다. 양 방법의 결과가 상당히 일치함을 알 수 있었다.

계산모델 III의 자유단에 Y축 방향으로 정적 하중 4.448 N이 작용할 때, 자유단의 정적 변위를 엄밀해⁵⁾로 구한 결과는 2.249 mm이었다. Fig. 9와 Fig. 10의 과도응답 결과가 특정 값으로 수렴하였고, Table 1에서 그 값을 확인해 보면 2.241 mm라는 것을 알 수 있었다. 따라서 이 연구에서 사용된 전산 프로그램이 상당히 정확함을 재차 확인할 수 있었다.

Table 2에는 전달질량계수법과 직접적분법으로 모델링에 사용된 곡선 보요소의 개수에 따라 0.020초에서의 응답을 나타내었다. 모델링에 사용된 보요소의 개수가 증가할수록 정적해석의 엄밀해에 수렴하고 있음을 확인할 수 있었다.

상기 Table 2를 구하는데 소요된 시간을 정리한 것이 Table 3이다. Table 3으로부터 전달질량계수법은 모델링에 사용된 곡선 보요소의 개수가 증가할 때 계산 시간이 소폭 증가하지만, 이에 반해 직접적분법은 계산 시간이 크게 증가하고 있음을 알 수 있다.

전술한 계산모델 III에 대한 해석을 통해서 곡선 보의 과도응답 해석을 고정도로 수행하기 위해서는 모델링에 사용될 곡선 보요소의 수를 증가시켜야 하고, 이 경우 직접적분법은 계산 시간이 급증하는 문제점이 확인되었다. 이에 반해서 전달질량계수법은 곡선 보요소의 수가 증가하더라도 빠른 계산이 가능함을 확인할 수 있었다.

한편 계산에 소요되는 계산 메모리의 측면에서도 양 방법을 고려해보면, 곡선 보요소의 개수가 아무리 많더라도 전달질량계수법은 질량계수행렬이 항상 3×3 밖에 되지 않는다. 반면에 직접적분법은 곡선 보요소의 개수가 증가할수록 전체 자유도가 증가하면서 행렬의 크기가 급증하게 되어 계산 메모리의 운영적인 측면에서도 직접적분법보다 전달질량계수법이 우수함을 알 수 있다.

Table 1 Transient response of model III

Time [s]	TMCМ [m]	DIM [m]
0.000	0	0
0.002	0.18728D-02	0.18728D-02
0.004	0.25882D-02	0.25882D-02
0.006	0.22595D-02	0.22594D-02
0.008	0.21846D-02	0.21847D-02
0.010	0.22430D-02	0.22430D-02
0.012	0.22489D-02	0.22489D-02
0.014	0.22394D-02	0.22394D-02
0.016	0.22394D-02	0.22394D-02
0.018	0.22408D-02	0.22408D-02
0.020	0.22407D-02	0.22407D-02

Table 2 Response of model III at 0.02 seconds

No. of elements	TMCМ [m]	DIM [m]
100	0.21147D-02	0.21147D-02
200	0.22143D-02	0.22143D-02
300	0.22338D-02	0.22338D-02
400	0.22407D-02	0.22407D-02

Table 3 Computational times

No. of elements	TMCМ [s]	DIM [s]
100	0.016	0.744
200	0.036	6.625
300	0.057	23.666
400	0.078	60.669

5. 결 론

곡선 보는 기계 및 구조물의 설계 시에 즐겨 사용되는 구조 요소 중의 하나이다. 기존의 유한 요소법으로 곡선 보에 대한 고정도의 과도응답 해석을 수행할 경우, 곡선 보를 아주 작은 수많은 곡선 보 요소로 분할하여 모델링해야 한다. 그리고 이것은 컴퓨터를 통한 해석 시에 많은 계산 시간과 계산 메모리를 요구하여, 곡선 보의 과도응답 해석자에게 적지 않은 부담을 준다.

이 논문에서 저자들은 전달질량계수법을 이용하여 2차원 곡선 보의 과도상태 응답을 효과적으로 구할 수 있는 전산 알고리즘을 제시하였다. 3 가지 계산 모델을 상대로 전달질량계수법과 직접

적분법으로 과도상태 응답해석을 수행하였고, 그 결과 전달질량계수법이 곡선 보의 과도상태 응답 해석에 신뢰성 있는 방법임을 확인하였다. 그리고 계산 속도와 계산 메모리의 활용적인 측면에서도 아주 효과적인 방법임을 입증하였다.

Author contributions

M. S. Choi; Algorithm development, Modeling, Programming, Numerical analysis, Verification, Writing-original draft, Writing-review & editing, K. U. Yang; Modeling, Programming, Numerical analysis, Verification, Writing-original draft, Writing-review & editing.

References

1. M. Petyt, 2010, "Introduction to Finite Element Vibration Analysis (2nd edition)", Cambridge University Press, New York, pp. 381-402.
2. K. Bathe, 1996, "Finite Element Procedures", Prentice Hall, New Jersey, pp. 769-785.
3. M. S. Choi and D. J. Yeo, 2013, "Dynamic Response Analysis of Cylindrical Shell with Axisymmetric Loading", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 17, No. 6, pp. 33-39.
4. M. S. Choi and D. J. Yeo, 2017, "Free Vibration Analysis of Curved Beams Regarded as Discrete System Using Finite Element- Transfer Stiffness Coefficient Method", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 21, No. 1, pp. 37-42. (DOI:10.9726/kspse.2017.21.1.037)
5. M. S. Choi, 2017, "Static Analysis of Two Dimensional Curbed Beam Structure by Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", Journal of The Korean Society for Power System Engineering, Vol. 21, No. 6, pp. 40-45. (DOI:10.9726/kspse.2017.21.6.040)