

동력시스템공학회지 제28권 제1호 pp. 51-61 2024년 2월 ISSN 2713-8429(Print) ISSN 2713-8437(Online) Journal of Power System Engineering https://doi.org/10.9726/kspse.2024.28.1.051 Vol. 28, No. 1, pp. 51-61, February 2024

# 터그보트 협력제어에 의한 해상플랫폼 이송용 선박의 운동제어 Motion Control of Offshore Platform Transporter by Cooperative Control of Multiple Tugboats

# 박정석\* · 최용운\*\* · 이동훈\*\*\* · 김영복\*\*\*† Jung-Suk Park\*, Yong-Woon Choi\*\*, Dong-Hun Lee\*\*\* and Young-Bok Kim\*\*\*†

(Received 18 January 2024, Revision received 23 February 2024, Accepted 23 February 2024)

**초록**: 본 논문에서는 해양플랫폼 등 자체추진장치를 갖지 않는 수상선의 운동제어를 위한 새로운 전 략 및 방법을 제안한다. 제어대상은 바지선 및 액추에이터 역할을 하는 4척의 터그보트로 구성된 복합 시스템이다. 따라서 터그보트의 추력과 이동방향의 적절한 제어를 통해 완전히 수동적인 바지선을 정 교하게 이동하기 위한 새로운 제어계설계법을 제안한다. 제어계는 강인제어기법으로 설계하고, 적절한 제어력분배를 위해서는 최적화기법을 도입한다. 제안하는 제어전략, 제어기법 및 제어력분배방법에 대 한 유효성을 시뮬레이션을 통해 검증한다.

키워드: 제어력분배, 강인제어, 최적화, 터크보트, 해양플랫폼

Abstract: This paper presents the modeling and cooperative control system design of an offshore platform transporter. In general, motion control of an offshore platform is very difficult because it does not have a propulsion system. Then, the desirable positioning of offshore platform can be achieved with the assistance of multiple tugboats. In this study, the dynamical characteristic of the offshore platform transporting system with multiple tugboats is formulated and useful control strategy is proposed to ensure safe and quick offshore platform operations. To achieve these objectives, we first develop the mathematical model of the entire transportation system. We then derive the desired relative angles and forces of the tugboats through the optimal constrained control allocation. Then,  $H_{\infty}$  controller is designed and the usefulness of the proposed control strategy is verified via simulation study.

Key Words: Control Allocation, Robust Control, Multiple, Tugboat, Offshore Platform

*** † Young-Bok Kim(https://orcid.org/0000-0001-6035-6744) :
Professor, Major of Mechanical System Engineering, Pukyong
National University.
*Jung-Suk Park(https://orcid.org/0000-0001-8165-7773) : Engineer.
Training Shin Backlarong Bulgrong National University
Training Ship Backkyong, Fukyong National Oniversity.
**Yong-Woon Choi(https://orcid.org/0009-0007-8084-456X) :
Professor, Faculty of Science and Engineering, SOKA
University.
***Dong Hun Loo(https://oroid.org/0000.0001.6157.0762) · Drofessor
Dolig-fluit Lee(https://orcid.org/0000-0001-0157-9705). Floressor,
Major of Mechanical System Engineering, Pukyong National
University.

# 1. 서 론

본 논문에서는 해상크레인 및 바지선과 같이, 추진시스템이 없어 자력으로 이동할 수 없는 해 상 플랫폼을 안전하고 신속하게 이동시키기 위한 운동제어문제를 다루고 있다. 이러한 해상플랫폼 은 특성상 추진장치를 장착한다고 해서 운동제어 성능 및 안정성 등 이동성의 획기적인 향상을 기 대하기는 어렵다. 또한 스러스터 추진장치를 장착 한 대형선박은 선박이 왕래하는 좁고 복잡한 환 경, 특히 접안작업 등 정교한 운동제어성능이 요 구되는 경우에는 터그보트의 지원을 받을 수밖에 없다. 즉 상당히 발전된 형태의 스러스터와 운동 제어시스템을 갖춘 경우에도 터그보트의 적절한 도움이 필요하다.

따라서 자체 추진장치를 갖지 않는 바지선 등 의 이동 및 운동제어는 더욱더 어려운 문제일 수 밖에 없다. 특히 혼잡한 조선 환경에서 해상크레 인과 같은 바지선 형태의 수상선을 안전하게 이 동하려면 더욱 섬세한 운동제어가 필요하며, 다수 의 터그보트를 이용해야 한다. 따라서 터그보트의 적절한 운동제어를 통해서만 바지선의 안전하고 신속한 이동성능이 결정된다.

터그보트를 이용하여 바지선의 운동제어성능을 개선하고자 하는 연구결과도 다수이다. 예를 들어 모든 터그보트를 바지선 한쪽 측면에 배치한 통 합 시스템을 제어대상으로 제어계를 설계하여 운 동제어성능을 확보하고자 하는 연구도 수행되었 다.<sup>1-3)</sup> 이것은 일반적으로 수행되는 선박 접안상황 을 고려하여 모든 터그보트를 선박에 구속된 장 치로 간주한 운동제어방법이라 할 수 있다. 즉 터 그보트는 항상 바지선의 특정된 위치에 구속되어 있으며, 각 터그보트에서 발생하는 제어력 작용 방향도 변하지 않는다고 가정하고 있다.

또한 바지선을 견인하는데 필요한 액추에이터 발생 동력을 최소한으로 사용하도록 제어계를 설 계하는 문제를 다룬 연구도 있다.<sup>4)</sup> 그리고 이러한 바지선의 운동제어문제를 DP 시스템을 구축하는 문제로 접근하여 제어계를 설계하는 방법도 제안 되었다.<sup>5)</sup> 그리고 터그보트의 미는 힘만 허용되는 조건에서 바지선의 제어문제를 다룬 연구결과도 보고되어 있다.<sup>6-7)</sup> 하지만 관련 분야 기술발전에 따라 자율운항이 가능한 현재의 선박 운항시스템 의 경우에도 중소형 선박을 제외하고는 접안 완 성단계까지의 완전한 자율적인 작업수행은 불가 능하다. 따라서 터그보트를 포함하여 항만시설에 도 접안작업 안정성을 높일 수 있는 장치나 방법 이 요구되고 있다.

본 논문에서는 이와 같은 맥락에서 자체 추진 장치를 갖지 않는 바지선을 안벽까지 이동하거나 이안하기 위해 터그보트를 적절히 배치하고, 이를 기반으로 운동제어시스템을 설계하는 방법을 제 안한다. 이렇게 하기 위해서는 각각의 터그보트에 대한 운동특성을 파악하고 이들의 바람직한 제어 성능을 확보하기 위한 적절한 제어력 분배전략도 마련해야 한다. 제어력 분배전략을 실현하기 위해 신경망이론을 적용한 최적화 제어력 분배방법에 대한 연구결과도 있다.<sup>8-10)</sup>

그러나 현재까지의 연구 결과, 대부분은 제어대 상인 선박에 자체추진장치가 장착되어 있는 경우 이다. 터그보트의 지원을 받는 상황이라 하더라도 마치 자체 추진장치가 장착되어 있는 것과 같은 시스템으로 설정하여 운동제어시스템을 설계하는 것이 일반적이다. 결과적으로는 터그보트 추력이 단일 반향으로만 작용하는 물리적 특성이 반영되 지도 않고, 로우프로 연결하여 끄는 경우의 상호 작용 등도 무시하고 있다. 따라서 이러한 연구 결 과와 실제 운용환경을 감안하여 바지선의 운동성 능을 개선하기 위한 제어계 설계법과 제어력 분 배방법에 대해 고찰한다.

예를 들어 기존 연구결과와는 달리, Fig. 1에 나 타낸 것과 같이 항만에서 수행되는 작업상황을 적극적으로 고려한다.

즉, 항만 내에서의 어려운 작업환경과 각 터그 보트의 미는 힘과 끄는 힘만이 바지선이나 이동 하고자 하는 선박에 작용한다는 제한조건을 반영 한다. 이러한 제약조건 아래에서도 바지선을 안전 하고 정교하게 이동시키는 제어방법을 도출하는 것이 본 연구에서의 궁극적인 목표이다.

구체적으로는 선박의 운동제어시스템에 대한

강인 안정성과 제어성능을 확보하기 위해 강인제 어기법인  $H_{\infty}$ 제어이론에 기반하여 제어기를 설계 한다. 그리하여 적절한 제어력 분배를 통해 터그 보트의 정교한 위치제어성능을 확보하도록 한다.

결론적으로 안전하고 신속하게 바지선을 제어 할 수 있는 제어계를 설계하고 시뮬레이션을 통 해 제안하는 제어전략과 제어기법의 유효성을 평 가하도록 한다.

#### 2. 시스템 모델링

본 연구에서는 Fig. 1과 같이 항만 내에서 4척 의 터그보트로 바지선을 이동시키기 위한 제어계 설계문제를 고려하고 있다. 이것으로부터 Fig. 1은 Fig. 2와 같은 개략도로 나타낼 수 있다. 즉, 제어 대상 선박인 바지선은 스러스트 등의 자체추진장 치를 사용하지 않는다. 이러한 설정 아래 안벽으 로 바지선을 이동시키거나 안벽에서 바깥으로 이 탈시키는데 필요한 터그보트의 배치상황을 표현 한 것이다. 이때 2척의 터그보트는 미는 힘만을, 다른 2척의 터그보트는 끄는 힘만을 통해 바지선 을 이동시키는 상황을 나타낸 것이며 이것은 실 제 작업상황을 그대로 반영한 것이다.

Fig. 2에 나타낸 것과 같이, 바지선을 미는 2척 의 터그보트는 선박에 접촉한 상태로 바지선의 운동제어를 위한 선수 각도와 추진력은 변한다고 가정한다. 또한, 다른 2척의 터그보트는 바지선과 로우프로 연결된 상태에서 바지선을 적절히 이동 시킨다.

이때 바지선의 위치제어에 필요한 추진력은 설 계된 제어기를 통해 구해지고, 이것으로부터 각 터그보트의 발생 추력 및 바지선에 대한 상대각 도가 자동으로 계산된다.

이때 터그보트의 위치값과 추진력 등을 각 터 그보트로의 전달은 제어력 분배 방법을 통해 적 절하게 실행되어야 한다. 따라서 Fig. 2의 전체적 인 시스템 개략도를 통해 운동방정식을 도출하는 과정을 다음과 같이 정리한다.

먼저 본 논문에서 사용되는 주요 파라미터는 다음과 같다.



Fig. 2 A schematic drawing and the coordinate definitions of the proposed system



Fig. 1 Schematics of a barge ship control strategy using tugboats

#### 2.1 바지선 운동특성 해석 및 모델링

Fig. 2에 나타낸 것과 같이 제어대상 선박인 바 지선은 추진장치 없이 터그보트에 의해 운동이 제어된다. 이러한 선박의 운동특성을 분석하고 수 식모델을 도출하기 위해서는 다음의 일반식을 이 용한다.<sup>11)</sup>

$$\begin{split} \boldsymbol{M}_{s} \boldsymbol{\nu}_{s} + \boldsymbol{D}_{s} \boldsymbol{\nu}_{s} &= \boldsymbol{\tau}_{s} \\ \boldsymbol{\eta}_{s} &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\psi}_{s}) \boldsymbol{\nu}_{s} \end{split}$$
(1)

여기서  $M_s \in R^{3 \times 3}$ 은 바지선의 관성행렬이고,  $D_s \in R^{3 \times 3}$ 은 바지선의 댐핑행렬로 각각 식 (2)와 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{M}_{s} = \begin{bmatrix} m_{s} - X_{u_{s}} & 0 & 0\\ 0 & m_{s} - Y_{v_{s}} & -Y_{r_{s}} \\ 0 & -N_{v_{s}} & I_{z_{s}} - N_{r_{s}} \end{bmatrix}$$
(2)

$$\boldsymbol{\mathcal{D}}_{s} = \begin{bmatrix} -X_{u_{s}} & 0 & 0\\ 0 & -Y_{v_{s}} - Y_{r_{s}}\\ 0 & -N_{v_{s}} - N_{r_{s}} \end{bmatrix}$$

또한 **η** = [x, y, ψ]<sup>T</sup>∈ R<sup>3</sup>는 지구 고정좌표계에서 의 바지선의 위치(x, y)와 선수각 ψ에 대한 관성 위치를 나타내며, **R**(ψ<sub>s</sub>)는 선박좌표를 관성좌표 로 변환시키는 변환행렬로 다음 식과 같다.

$$\boldsymbol{R}(\psi_s) = \begin{bmatrix} \cos\psi_s - \sin\psi_s \ 0\\ \sin\psi_s \ \cos\psi_s \ 0\\ 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix}$$
(3)

바지선에 작용하는 서지(surge) 스웨이(sway) 및 요우(yaw)방향 추진력은  $\boldsymbol{\tau}_s = [\boldsymbol{\tau}_{sx}, \boldsymbol{\tau}_{sy}, \boldsymbol{\tau}_{sr}]^T$ 로 나 타내며, 이것은 행렬  $\boldsymbol{T}(\alpha)$ 와 힘의 조합으로 다음 식 (4)와 같이 표현할 수 있다.

$$\boldsymbol{\tau}_{s} = \boldsymbol{T}(\alpha)\boldsymbol{F}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_{1} \alpha_{2} \alpha_{3} \alpha_{4}]^{T}, \boldsymbol{F} = [F_{1} F_{2} F_{3} F_{4}]^{T}$$

$$\boldsymbol{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha_{1} & c\alpha_{2} & -c\alpha_{3} \\ -s\alpha_{1} & -s\alpha_{1} & s\alpha_{1} \\ -l_{1y}c\alpha_{1} + l_{b}l_{2y}c\alpha_{2} + l_{b}s\alpha_{2}l_{3y}c\alpha_{3} - l_{b}s\alpha_{3} \\ & -c\alpha_{4} \\ -s\alpha_{1} \\ -l_{4y}c\alpha_{4} - l_{b}s\alpha_{4} \end{bmatrix}$$

$$(4)$$

여기서  $c(\bullet) = \cos(\bullet)$ 이고  $s(\bullet) = \sin(\bullet)$ 이 다. 식 (4)에서  $F = [F_1, F_2, F_3, F_4]^T$ 는 액추에이 터인 4척의 터그보트로부터 발생하는 힘으로 즉, 각 터그보트의 추진력을 나타낸다. 이것은 제어력  $\tau_s$ 로부터 제어력 분배방법으로 계산되며, 일반적 으로는 행렬  $T(\alpha)$ 의 Moore-Penrose 의사 역행렬  $(T(\alpha)^*)$ 을 이용하면 된다. 즉,

$$F = T(\alpha)^{T} T(\alpha)^{*} \tau_{s}$$

$$T(\alpha)^{*} = [T(\alpha) T(\alpha)^{T}]^{-1}$$
(5)

와 같은 관계로부터 계산되며, 바지선과 터그보트 사이의 각도 α<sub>i</sub>(i=1,...,4)가 주어지면 해당 힘을 구할 수 있다. 이때 **η**<sub>s</sub>와 **ν**<sub>s</sub>의 사이의 관계는 식 (1)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\boldsymbol{\nu}_s = \boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{\psi}_s) \boldsymbol{\eta}_s \tag{6}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}}_{s} = \dot{\boldsymbol{R}}^{T}(\psi_{s})\dot{\boldsymbol{\eta}}_{s} + \boldsymbol{R}^{T}(\psi_{s})\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{s}$$
(7)

이것으로부터 지구고정좌표계에서의 바지선 운 동방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\boldsymbol{M}_{s}^{*}\boldsymbol{\eta}_{s}^{*} + \boldsymbol{D}_{s}^{*}\boldsymbol{\eta}_{s}^{*} = \boldsymbol{\tau}_{s}^{*}$$

$$\tag{8}$$

여기서 각 행렬은 다음과 같다.

$$\begin{split} \boldsymbol{M}_{s}^{*} &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\psi}_{s})\boldsymbol{M}_{s}\boldsymbol{R}^{T}(\boldsymbol{\psi}_{s}), \qquad (9) \\ \boldsymbol{D}_{s}^{*} &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\psi}_{s})(\boldsymbol{D}_{s}\boldsymbol{R}^{T}(\boldsymbol{\psi}_{s}) - \boldsymbol{M}_{s}\boldsymbol{S}(\dot{\boldsymbol{\psi}}_{s})\boldsymbol{R}^{T}(\boldsymbol{\psi}_{s})), \\ \boldsymbol{\tau}_{s}^{*} &= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\psi}_{s})\boldsymbol{\tau}_{s} \end{split}$$

위 식에서  $m{S}(\dot{\psi}_s)$ 는 skew 행렬로 다음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{S}(\dot{\psi}_{s}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi}_{s} & 0\\ \dot{\psi}_{s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(10)

#### 2.2 터그보트 운동특성 해석 및 모델링

Fig. 1과 Fig. 2에 나타낸 것과 같이, 자력으로 이동이 불가능한 바지선은 4척의 터그보트에 의 해 이동한다. 이때 터그보트 2척은 바지선에 항상 접촉한 상태로 미는 힘만 작용한다. 나머지 2척은 로우프로 바지선과 연결되고 반대 방향으로 끄는 힘만이 작용한다. 이러한 상황이면, 접촉한 상태 로 미는 힘만 전달하는 2척은 바지선에 장착되어 회전이 가능한 아지무스(azimuth)형 추진장치라 볼 수 있어 터그보트의 정교한 운동특성은 고려 하지 않는다. 단, 추진력은 한 방향으로만 전달한 다는 제약조건은 따른다. 따라서 단방향 추진력과 힘의 작용방향(터그보트의 상대 선수각) 변화만 고려하면 된다.

그런데 로우프로 연결되어 끄는 힘을 가하는 2 척은 독립된 공간에서 자유롭게 이동하므로 터그 보트 운동특성을 무시할 수 없다. 따라서 2척에 대한 물리특성을 고려하기 위해 다음과 같은 운 동방정식을 유도할 수 있다. 바지선의 경우와 같이  $\eta_i = [x_i, y_i, \psi_i]^T \in R^3$ (*i*=1,2)를 지구고정좌표계에서의 터그보트 위치 와 선수각이라 두면, 터그보트 운동방정식은 다음 과 같이 구해진다.

여기서 *M*<sub>i</sub>∈*R*<sup>3×3</sup>과 *D*<sub>i</sub>∈*R*<sup>3×3</sup>은 터그보트의 관성행렬과 댐핑행렬이다. 터그보트로부터 생산되 는 힘은 로우프를 통해 바지선에 전달되며, 이때 로우프의 물리적 특성은 편의상 고려하지 않는다. 즉 로우프의 신축과 팽창은 없다고 가정한다. 이 러한 가정 아래, Fig. 2로부터 식 (11)에서의 행렬 *B*<sub>i</sub>는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\boldsymbol{B}_{i}(\alpha_{i},\psi_{s},\psi_{i}) = \begin{bmatrix} c(\alpha_{i}+\psi_{s}-\psi_{i})\\ s(\alpha_{i}+\psi_{s}-\psi_{i})\\ -l_{ia}s(\alpha_{i}+\psi_{s}-\psi_{i}) \end{bmatrix}$$
(12)

또한 Fig. 2에서 로우프로 연결된 터그보트의 위치는 식 (13)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i0} + l_{ic} c(\alpha_i + \psi_s) + l_{ia} c(\psi_i) \\ y_i &= y_{i0} - l_{ic} s(\alpha_i + \psi_s) - l_{ia} s(\psi_i) \end{aligned}$$
(13)

$$\begin{aligned} & (14) \\ & x_{i0} = x_s + l_i c(\theta_i + \psi_s) \\ & y_{i0} = y_s - l_i s(\theta_i + \psi_s) \end{aligned}$$

이고, 식 (11)의 두 번째 행의 미분은

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{i} = \tilde{\boldsymbol{R}}_{i} \ddot{\boldsymbol{\eta}}_{s} + \boldsymbol{G}_{i} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{i} \\ \ddot{\psi}_{i} \end{bmatrix} + \boldsymbol{W}_{1i} \boldsymbol{W}_{2i} \dot{\boldsymbol{\eta}}_{s} + \boldsymbol{N}_{1i} \boldsymbol{N}_{2i} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{i} \\ \ddot{\psi}_{i} \end{bmatrix}$$
(15)

와 같으며, 위 식에서 각 행렬은 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{R}}_{i} = \begin{bmatrix} 1 \ 0 - l_{ic} s\left(\alpha_{i} + \psi_{s}\right) - l_{i} s\left(\theta_{i} + \psi_{s}\right) \\ 0 \ 1 - l_{ic} c\left(\alpha_{i} + \psi_{s}\right) - l_{i} c\left(\theta_{i} + \psi_{s}\right) \\ 0 \ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(16)

동력시스템공학회지 제28권 제1호, 2024년 2월 55

$$\begin{split} \boldsymbol{G}_{i} &= \begin{bmatrix} -l_{ic}s\left(\alpha_{i}+\psi_{s}\right)-l_{ia}s\left(\psi_{i}\right)\\ -l_{ic}c\left(\alpha_{i}+\psi_{s}\right)-l_{ia}c\left(\psi_{i}\right)\\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{W}_{1i} &= \begin{bmatrix} -l_{ic}(\theta_{i}+\psi_{s})-l_{ic}c(\alpha_{i}+\psi_{s}) & -l_{ic}(\alpha_{i}+\psi_{s}) & 0\\ l_{i}s\left(\theta_{i}+\psi_{s}\right)+l_{ic}s\left(\alpha_{i}+\psi_{s}\right) & l_{ic}s\left(\alpha_{i}+\psi_{s}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{W}_{2i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\psi}_{s}\\ 0 & 0 & 2\dot{\alpha}_{i}\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{N}_{1i} &= \begin{bmatrix} 0 - l_{ic}c\left(\alpha_{i}+\psi_{s}\right) - l_{ia}c\left(\psi_{i}\right)\\ 0 & l_{ic}s\left(\alpha_{i}+\psi_{s}\right) & l_{ia}s\left(\psi_{i}\right)\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{N}_{2i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0\\ \dot{\alpha}_{i} & 0\\ 0 & \dot{\psi}_{i} \end{bmatrix} \end{split}$$

지금까지의 계산 결과를 이용하면 터그보트의 운동방정식은 다음 식과 같이 표현된다.

$$\mathbf{M}_{i}\mathbf{R}^{T}(\psi_{i})\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{i} + \mathbf{M}_{i}\dot{\mathbf{R}}^{T}(\psi_{i})\dot{\boldsymbol{\eta}}_{i} + \mathbf{D}_{i}\mathbf{R}^{T}(\psi_{i})\dot{\boldsymbol{\eta}}_{i} \qquad (17)$$

$$= \boldsymbol{\tau}_{i} - \boldsymbol{B}_{i}F_{i}$$

$$\mathbf{M}_{i}\ddot{\boldsymbol{\eta}}_{i} + \mathbf{D}_{i}^{*}\boldsymbol{\eta}_{i} = \boldsymbol{\tau}_{i}^{*} - \boldsymbol{R}(\psi_{i})\boldsymbol{B}_{i}F_{i}$$

여기서 각 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{M}_{i}^{*} = \boldsymbol{R}(\psi_{i})\boldsymbol{M}_{i}\boldsymbol{R}^{T}(\psi_{i})$$

$$\boldsymbol{D}_{i}^{*} = \boldsymbol{R}(\psi_{i})\boldsymbol{M}_{i}\boldsymbol{R}^{T}(\psi_{i}) + \boldsymbol{R}(\psi_{i})\boldsymbol{D}_{i}\boldsymbol{R}^{T}(\psi_{i})$$

$$\boldsymbol{\tau}_{i}^{*} = \boldsymbol{R}(\psi_{i})\boldsymbol{\tau}_{i}$$
(18)

그리고 식 (15)를 식 (17)에 대입하여 정리하면 터그보트의 운동방정식은 최종적으로 식 (19)와 같고, 이 식에서의 각 행렬은 식 (20)과 같이 정리 된다.

 $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{i} \overset{\cdot}{\boldsymbol{z}}_{i} + \widetilde{\boldsymbol{D}}_{i} \overset{\cdot}{\boldsymbol{z}}_{i} = \boldsymbol{G}_{i}^{T} \boldsymbol{\tau}_{i}^{*} - \widetilde{\boldsymbol{B}}_{i} \boldsymbol{F} + \widetilde{\boldsymbol{D}}_{si} \overset{\cdot}{\boldsymbol{\eta}}_{s}$ (19)

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}_{i} = \boldsymbol{G}_{i}^{T} \boldsymbol{M}_{i}^{*} \boldsymbol{G}_{i}$$
(20)

$$\begin{split} \widetilde{\boldsymbol{B}}_{i} &= \boldsymbol{G}_{i}^{T}(\boldsymbol{R}(\psi_{i})\boldsymbol{B}_{i}\boldsymbol{N}_{i} + \boldsymbol{M}_{i}^{*}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{i}(\boldsymbol{M}_{s}^{*})^{-1}\boldsymbol{R}(\psi_{s})\boldsymbol{T}(\alpha) \\ \widetilde{\boldsymbol{D}}_{si} &= \boldsymbol{G}_{i}^{T}(\boldsymbol{M}_{i}^{*}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{i}(\boldsymbol{M}_{s}^{*})^{-1}\boldsymbol{D}_{s}^{*} - \boldsymbol{M}_{i}^{*}\boldsymbol{W}_{1i}\boldsymbol{W}_{2i} - \boldsymbol{D}_{i}^{*}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{i}) \\ \boldsymbol{z}_{i} &= [\alpha_{i} \ \psi_{i}]^{T} \end{split}$$

#### 3. 제어력 분배

바지선을 목표지점까지 이동시키기 위한 터그 보트 배치 등의 운용방법은 식 (4)로부터 도출할 수 있다. 이것을 제어력 분배라 하며 행렬  $T(\alpha)$ 의 의사 역행렬(pseudo-inverse)를 이용하는 것이 가장 일반적인 방법이다. 그러나 이것은 기하학적 제약조건, 즉 끄는 힘만 활용할 수 있다는 제약  $0 \le F_i \le F_{th}$ 와 바지선에 대한 추진력 작용선이 이루는 각도, 즉 터그보트 상대 선수각에 대한 제 한  $\alpha_{\min} \le \alpha_i \le \alpha_{\max}$ 을 항상 만족시키지 못한다. 따라서 본 연구에서는 위에서 기술한 제약조건 을 만족하도록 최적화에 기반한 제어력 분배전략 을 이용하도록 한다. 이를 위해 먼저, 식 (4)로부 터 다음 식을 유도한다.

$$\boldsymbol{\tau}_{sd} + \boldsymbol{s} = \boldsymbol{T}(\alpha)\boldsymbol{F} \tag{21}$$

여기서 s는 최소화해야 할 변수이고,  $\tau_{sd}$ 는  $\tau_s$ 의 목표값이라 둔다. 다음으로 최적화 변수 벡터를  $z = [\Delta F^T, \Delta \alpha^T, s^T]^T$ 로 정의하며,  $\Delta F = F_d - F$ ,  $\Delta \alpha = \alpha_d - \alpha$ 라 둔다. 여기서 하첨자 d는 각 변수 혹은 벡터의 목표값을 의미한다. 그러면 식 (21)의 우항은 Taylor 급수전개로부터 국부 근사화시킬 수 있다.

따라서 제어력 분배는 다음식으로 주어지는 최 적화문제의 해를 구하는 것으로 귀착된다.<sup>14)</sup>

$$\min_{z} \{J = \boldsymbol{z}^{T} \boldsymbol{H} z + h^{T} \boldsymbol{z}\}$$
s.t.  $\boldsymbol{A}_{eq} \boldsymbol{z} = b_{eq}, \ \boldsymbol{z}_{low} \leq \boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{z}_{up}$ 
(22)

여기서 **H**∈R<sup>11×11</sup>는 정정대칭행렬이고 **h**∈R<sup>11</sup> 는 목적항으로 선형벡터이다. 그 외의 항목은 다 음과 같이 정의된다.

$$\boldsymbol{A}_{eq} = \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{F}}\boldsymbol{T}(\alpha)\boldsymbol{F}\right|_{\alpha,F} \frac{\partial}{\partial \alpha}\boldsymbol{T}(\alpha)\boldsymbol{F}\right|_{\alpha,F} - \boldsymbol{I}_{3\times3} \right]$$
$$\boldsymbol{b}_{eq} = \boldsymbol{\tau}_{sd} - \boldsymbol{T}(\alpha)\boldsymbol{F}$$
(23)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}_{low} &= \left[ -\boldsymbol{F}^T \, \left( \boldsymbol{\alpha}_{\min} - \boldsymbol{\alpha} \right)^T \, \boldsymbol{s}_{\min}^T \right]^T \\ \boldsymbol{z}_{up} &= \left[ \left( \boldsymbol{F}_{th} - \boldsymbol{F}^T \right) \, \left( \boldsymbol{\alpha}_{\max} - \boldsymbol{\alpha} \right)^T \, \boldsymbol{s}_{\max}^T \right]^T \end{aligned}$$

식 (23)으로 주어진 최적화 문제의 해는 수치연 산을 통해 쉽게 구해지며, 그러한 과정을 통해 구 한 해는

$$\alpha_d = \alpha + \Delta a, \ \boldsymbol{F}_d = \boldsymbol{F} + \Delta \boldsymbol{F} \tag{24}$$

와 같고, 이것은 위에 서술한 작용력의 방향에 대 한 제약( $0 \le F_i \le F_{th}$ ) 및 각도에 대한 제약조건 을 만족한다.

#### 4. 제어기 설계

본 장에서는 바지선을 안전하고 신속하게 원하는 위치로 이동시키기 위해 제어기를 설계한다. 제어기는 위에 서술한 여러 가지 제약조건을 만 족하도록 설계한다.<sup>12-13)</sup>

먼저, 4척의 터그보트 중 2척은 바지선에 접촉 한 상태로 미는 힘만이 제어력이 되어 바지선에 전달된다. 그 외 2척의 터그보트는 로우프에 연결 되어 끄는 힘으로 바지선의 운동을 제어한다. 이 때 앞서 기술한 것과 같이 다중 터그보트를 이용 한 접안 제어시스템 설계 시 요구되는 터그보트 의 운동특성과 터그보트의 제어력 분배 문제에 대해 집중적으로 다루고 있기에 본 연구에서는 로우프의 물리적 특성변화는 없는 것으로 간주한 다. 또한, 모델링 과정에서 고려하지 않는 물리적 매개변수의 불확실성을 극복하기 위해 강인제어 기법을 적용하여 제어기를 설계한다.

결국, 제약조건을 감안하여 적절히 제어력을 분 배함으로써 바지선에 대한 바람직한 운동제어성 능을 확보할 수 있게 된다. 제어기는 Fig. 3에 나 타낸 것과 같이 대표적인 강인제어기법인  $H_{\infty}$ 제 어기 설계법에 기반하여 설계한다.

Fig. 3에서 w는 외부입력,  $\boldsymbol{z} = [y_1, y_2]^T$ 는 제어 출력, P(s)는 일반화 플랜트(generalized plant)를 나타낸다.



Fig. 3  $H_{\infty}$  control framework

이때 외부입력 w에서 출력 z까지의 폐루프 전 달함수를  $T_{zw}$ 로 정의하면,  $H_{\infty}$ 제어기 설계목적은 식 (25)로 주어진 제약조건을 만족하는 제어기 K(s)를 구하는 것으로 귀착된다.

$$\parallel T_{zw} \parallel_{\infty} < \gamma \tag{25}$$

여기서, 항내에서는 선박이동속도가 충분히 느 리며 급격한 운동특성변화가 없다고 가정하면  $\psi_s, \psi_1, \psi_2$ 는 충분히 작은 값으로 간주할 수 있다. 이것으로부터 비선형특성이 포함된 원래의 운 동방정식 및 상태방정식은 충분히 선형 상태공간 모델로 표현할 수 있다. 결과적으로 새롭게 상태 벡터는  $\bar{\boldsymbol{x}} = [\bar{\boldsymbol{\eta}}_s^T, \boldsymbol{\eta}_s^T, \dot{\boldsymbol{z}}_1^T, \boldsymbol{z}_2^T, \boldsymbol{z}_2^T]^T$ , 제어입력 벡 터는  $\boldsymbol{u}_H = [\tau_s^T, \tau_1^T, \tau_2^T]^T$ 와 같이 정의한다.

이것으로부터 선형상태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{\overline{x}} = A\overline{\overline{x}} + Bu_H$$

$$(26)$$

$$\overline{\overline{y}} = C\overline{\overline{x}}$$

여기서 시스템 행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} A_{13} \\ A_{21} A_{22} A_{23} \\ A_{31} A_{32} A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{M}_{s}^{-1} \boldsymbol{D}_{s} \boldsymbol{0}_{3 \times 3} \\ \boldsymbol{I}_{3 \times 3} \boldsymbol{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}, A_{12} = A_{13} = [\boldsymbol{0}_{6 \times 4}]$$
(27)

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -\overline{M}_{1}^{-1}\overline{D}_{s1} 0_{2\times3} \\ 0_{2\times3} 0_{2\times3} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} -\overline{M}_{1}^{-1}\overline{D}_{1} 0_{2\times2} \\ I_{2\times2} 0_{2\times2} \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 0_{4\times4} \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} \overline{M}_{2}^{-1}\overline{D}_{s2} 0_{2\times3} \\ 0_{2\times3} 0_{2\times3} \end{bmatrix}, A_{32} = \begin{bmatrix} 0_{4\times4} \end{bmatrix}$$

$$A_{33} = \begin{bmatrix} -\overline{M}_{2}^{-1}\overline{D}_{2} 0_{2\times2} \\ I_{2\times2} 0_{2\times2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} M_{s}^{-1} 0_{3\times3} 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} 0_{3\times3} 0_{3\times3} \\ 0_{2\times3} \overline{M}_{1}^{-1}\overline{G}_{1}^{T} 0_{2\times3} \\ 0_{2\times3} 0_{2\times3} \overline{M}_{2}^{-1}\overline{G}_{2}^{T} \end{bmatrix}$$

$$(28)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0_{3\times3} I_{3\times3} 0_{3\times8} \\ 0_{2\times8} I_{2\times2} 0_{2\times2} \\ 0_{2\times10} 0_{2\times2} I_{2\times2} \end{bmatrix}$$

그리고 위 식에 포함된 각 요소행렬은 다음 식 과 같다.

$$\overline{\boldsymbol{M}}_{i} = \overline{\boldsymbol{G}}_{i}^{T} \boldsymbol{M}_{i} \overline{\boldsymbol{G}}_{i}$$

$$\overline{\boldsymbol{D}}_{i} = \overline{\boldsymbol{G}}_{i}^{T} \boldsymbol{D}_{i} \overline{\boldsymbol{G}}_{i}$$

$$\overline{\boldsymbol{D}}_{,i} = \overline{\boldsymbol{G}}_{i}^{T} (\boldsymbol{M}_{i} \overline{\boldsymbol{R}}_{i} \boldsymbol{M}_{i}^{-1} \boldsymbol{D}_{i} - \boldsymbol{D}_{i} \overline{\boldsymbol{R}}_{i})$$
(30)

$$\overline{\boldsymbol{G}}_{i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -l_{ic} - l_{ia} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \overline{\boldsymbol{R}}_{i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l_{i}s(\theta_{i}) \\ 0 & 1 - l_{ic} - l_{i}c(\theta_{i}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(31)

제어계 설계를 위해 Fig. 3의 일반화 플랜트는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}_{18 \times 9} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0}_{9 \times 18} & \boldsymbol{0}_{9 \times 9} & \boldsymbol{I}_{9 \times 9} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}_{9 \times 9} & \boldsymbol{0}_{9 \times 9} \\ \boldsymbol{-C} & \boldsymbol{I}_{9 \times 9} & \boldsymbol{0}_{9 \times 9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\overline{x}} \\ \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{u}_H \end{bmatrix}$$
(32)

이것으로부터 제어기를 설계할 수 있으며, 제어 입력은  $u_H = [\tau_s^T, \tau_1^T, \tau_2^T]^T$ 와 같이 계산된다. 3장에 기술한 제어력 분배방법을 이용하면  $\tau_s$ 로부터 터 그보트 목표 추진력  $F_d$  및 터그보트 목표 선수각



Fig. 4 Block diagram of the proposed control system

Table 1 Specifications of model ships

Item	Parameter	Value
Barge ship	Length	2.0 [m]
	Breath	1.0 [m]
	Weight	21.5 [kg]
Tug boat	Length	0.75 [m]
	Breath	0.3 [m]
	Weight	0.45 [kg]

α<sub>d</sub>가 자동으로 계산된다. Fig. 4는 제어기로부터
 계산된 제어력이 제어력 분배를 통해 각각의 터
 그보트로 배분되어 터그보트가 생산하는 추진력
 이 바지선에 작용하는 과정을 나타낸 개략도이다.

### 5. 시뮬레이션

Table 1에 시뮬레이션에 이용되는 바지선과 터 그보트 제원을 정리하여 나타내었으며, 4척의 터 그보트는 모두 규격이 동일하다. 4장에 기술하였 듯이 본 논문에서는 강인 제어기 설계기법인 H<sub>∞</sub> 제어기법으로 제어기를 설계하였고, 이것을 이용 하여 시뮬레이션을 실행하였다.

시뮬레이션 조건은 X-Y 좌표상 (0[m], 0[m]) 위치에서 출발하여 (10[m], 10[m])지점으로 직선 이동하도록 경로(Fig. 5에서 녹색 파선)를 설정하 였다. 이때 각 터그보트 운동에 대한 제약조건으 로 상대선수각 변동범위는 ±π/3[rad] 이하, 제어 력에 대해서는 0 ≤  $F_i \le 2$ [N] 범위의 추진력만 사 용할 수 있다고 설정하였다. 이러한 제약조건 아 래, 설계된 제어기를 적용하여 수행한 시뮬레이션 결과를 설명하도록 한다.

먼저 Fig. 5는 설정경로를 따라 이동하는 바지 선과 4척의 터그보트 운동을 총괄적으로 나타낸



Fig. 5 Route tracking performance of the barge ship (offshore platform) and tugboats

것이다. 그림에서 가장 큰 사각형 박스가 바지선, 여기에 접촉하고 있는 두 개의 작은 파란색 오각 형이 바지선에 미는 힘을 가하는 터그보트이며, 붉은색 오각형이 바지선을 끄는 힘을 가하는 터 그보트이다.

녹색선은 바지선을 끄는 터그보트와 바지선을 연결한 로우프이다. 바지선을 목표지점까지 이동 시키는 과정에서 각 터그보트의 운동특성은 그림 을 통해 쉽게 이해할 수 있다. 또한, 설정된 경로 에 따라 바지선이 양호하게 추종하는 것을 확인 할 수 있다.

지금부터는 터그보트 각각에 대한 운동특성을 상세히 설명하도록 한다. Fig. 6과 Fig. 7은 바지 선을 로우프로 끄는 힘을 가하는 #1 및 #2 터그 보트의 운동특성을 시간응답으로 나타낸 것이 다. 그림에서 보면 알 수 있듯이 바지선이 설정 된 경로로 이동시키기 위해 #1 및 #2 터그보트 또한 위치제어가 이루어지고 있는 것을 확인할 수 있다.

이러한 운동특성은 제어기로부터 계산된 제어 신호를 어떻게 분배하느냐에 따라 제어성능이 달 라진다. 본 연구에서는 3장에서 설명한 것과 같이 최적 제어력 분배법칙에 따라 제어력 분배를 실 행하였으며, 그 결과 Fig. 5와 같이 양호한 제어성 능을 확보할 수 있게 되었다.

그리고 Fig. 8에서 위의 그림은 제어기로부터 계산된 제어신호, 즉 바지선을 이동시키기 위해 터그보트에 전달되는 이상적인 제어신호이다. 반 면, Fig. 8의 아래 그래프는 제어기로부터 전달받 은 신호를 목표값으로 받아들여 터그보트가 생산 하는 제어력이다.

만일 터그보트의 동특성을 고려하지 않는다면 Fig. 8에서 신호 간의 차이가 없이 완전히 같은 값이 된다. 그러나 터그보트가 갖는 물리특성이 반영되었기 때문에 차이가 발생할 수밖에 없고, 실제 적용 시에도 터그보트의 동특성은 반드시 고려되어야 한다. 따라서 Fig. 8의 제어신호로부터 제어력 분배가 수행되고 분배된 제어력은 4척의 터그보트로 전달되어 바지선을 이동시켜야 할 추 진력으로 변환된다.







동력시스템공학회지 제28권 제1호, 2024년 2월 59



Fig. 8 Control force from  $H_{\infty}$  controller and control allocation



Fig. 9 Angle and force of tugboats from control allocation

결과적으로 제안된 제어력 분배를 통해 4척의 터그보트가 바지선을 목표지점까지 이동시키기 위해 만드는 상대 선수각 및 바지선에 작용하는 제어력을 Fig. 9에 각각 나타내었다.

Fig. 9에서 알 수 있듯이 제어력 분배를 위한 터그보트 허용 회전각도 범위 ±π/3[rad] 및 허용 제어력에 대한 제약조건 0 ≤ **F**<sub>i</sub> ≤ 2[N]을 만족하 고 있다는 것을 명확하게 확인할 수 있다. 또한 바지선이 목표지점에 가까워질수록 터그보트의 제어력은 점차 줄이고 상대 선수각에 대한 제어 를 통해 정교하게 목표지점에 안착하는 것을 확 인할 수 있다.

# 6.결론

본 논문에서는 해양플랫폼 등 자체추진장치를 갖지 않는 수상선의 운동제어전략 및 방법에 대 해 고찰하였다. 즉, 터그보트의 지원으로 이동하 는 바지선의 운동제어를 위해 바지선뿐만 아니라 터그보트의 운동특성을 분석하고 그 결과를 기반 으로 제어기를 설계하였다.

특히, 복잡한 항내에서의 안전하고 정교한 이동 성능을 확보하기 위해서 바지선뿐만 아니라 터그 보트의 동적특성도 모델링에 반영하였다. 또한 제 어력 분배를 위해서는 최적화기법을 이용하였으 며, 터그보트의 적절한 운동제어를 통해 바지선의 바람직한 운동특성을 확보할 수 있다는 것을 시 뮬레이션을 통해 확인하였고, 제안하는 제어기법 의 유효성도 검증하였다.

#### 후 기

This work was supported by the National Research Foundation of Korea (NRF) grant funded by the Korean government (MSIT) (No.2022 R1A2C1003486) and under Project BK21 FOUR (Smart Convergence and Application Education Research Center).

#### Author contributions

Y. B. Kim; Conceptualization. D. H. Lee; Supervision. Y. W. Choi; Formal analysis. J. S. Park; Writing-original draft. Y. B. Kim; Writing-review & editing. D. H. Lee; Methodology. Y. W. Choi; Investigation. Y. B. Kim; Funding acquisition. J. S. Park; Software. J. S. Park; Data curation. Y. B. Kim; Validation.

#### References

1. D. H. Lee, Y. B. Kim and C. W. Kim, 2022, "A study on motion control strategy and robust control system design for a Barge Ship with Tugboats", Journal of Power System Engineering, 26(4), 21-31.

(https://doi.org/10.3390/jmse10101413)

 D. H. Lee, T. Huynh, Y. B. Kim and J. S. Park, 2022, "Motion control system design for Barge-Type surface ships using Tugboats", Journal of Marine Science and Engineering, 10(10), 1-15.

(https://doi.org/10.3390/jmse10101413)

- H. C. Park, D. H. Lee and Y. B. Kim, 2022, "A study on control system design for Barge Ship motion control with Tugboats", Journal of Power System Engineering, 26(4), 21-31. (https://doi.org/10.9726/kspse.2022.26.3.060)
- 4. D. Q. Tran, D. H. Lee, T. Y. Kim, Y. B. Kim and H. C. Park, 2018, "A study on maneuvering performance improvement of a towed vessel without a power propulsion system: system modeling", Journal of the Korean Society of Fisheries and Ocean Technology, 54(4), 343-352. (https://doi.org/10.3796/KSFOT.2018.54.4.343)
- V. P. Bui and Y. B. Kim, 2012, "A study on the development of dynamic positioning system for Barge Type surface vessels", Journal of Power System Engineering, 1692, 66-74. (https://doi.org/10.9726/kspse.2012.16.2.066)
- V. P. Bui, H. Kawai, Y. B. Kim and K. S. Lee, 2011, "A ship berthing system design with four tugboats", Journal of Mechanical Science and Technology, 25, 1257-1264. (https://doi.org/10.1007/s12206-011-0215-4)

 S. M. Lee, J. H. Lee, M. I. Roh, K. S. Kim, S. H. Ham and H. W. Lee, 2021, "A optimization model of tugboat operation for conveying a large surface vessel", Journal of Computational Design and Engieering, 8(2), 654-675. (https://doi.org/10.1093/jcde/qwab006)

- M. Chen and Bin. Jiang, 2013, "Adaptive control and constrained control allocation for overactuated ocean surface vessels", International Journal of System Science, 44(12), 2295-2309. (https://doi.org/10.1080/00207721.2012.702239)
- R. Skulstad, G. Li, T. I. Fossen and H. Zhang, 2023, "Constrained control allocation for dynamic ship positioning using deep neural network", Ocean Engineering, 279(114434), 1-9.

(https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.114434.)

 Z. Du, R. R. Negenborn and V. Reppa, 2023, "Distributed dynamic coordination control for offshore platform transportation under ocean environmental disturbances", IEEE Transactions on Control Systems Technology, 31(5), 2093-2106.

(https://doi.org/10.1109/TCST.2023.3291557.)

- T. I. Fossen, 2002, "Marine control system -guidance : navigation, rigs and underwater vehicle", Marine Cybernetics, Trondheim, Norway.
- T. A. Johansen, T. I. Fossen and S. P. Berge, 2004, "Constrained nonlinear control allocation with singularity avoidance using sequential quadratic programming", IEEE Transactions on Control Systems Technology, 12(1), 211-216. (https://doi.org/10.1109/TCST.2003.821952)
- P. Tristan and D. Alejandro, 2009, "Constrained control design for dynamic positioning of marine vehicles with control allocation", Identification and Control, 30(2), 57-70. (https://doi.org/10.4173/mic.2009.2.2)
- F. Scibilia and R. Skjetne, 2012, "Constrained control allocation for vessel with azimuth thrusters", IFAC Proceedings Volumes, 45(27), 7-12.

(https://doi.org/10.3182/20120919-3-IT-2046.00002)