

탄성지지된 티모센코 호의 면외 자유진동 해석 Out-of-Plane Free Vibration Analysis of Timoshenko Arcs with Elastic Supports

최명수* · 김명준** · 여동준*†

Myung-Soo Choi*, Myung-Jun Kim** and Dong-Jun Yeo*†

(Received 29 July 2021, Revision received 20 December 2021, Accepted 20 December 2021)

Abstract : Arcs have widely been used as structural elements in many mechanical, aerospace, and civil engineering applications. The authors previously analyzed the in-plane free vibration of Timoshenko arcs with elastic supports by using the transfer influence coefficient method. The basic concept of this method is based on the transfer of influence coefficient. In this study, the transfer influence coefficient method is applied to the out-of-plane vibration of Timoshenko arcs. The authors formulate a computational algorithm to analyze the out-of-plane free vibration of the arcs with elastic supports by using the transfer influence coefficient method. The reliability of the transfer influence coefficient method is confirmed by comparing both the numerical results of the transfer influence coefficient method and those of other researchers. The authors verify that the transfer influence coefficient method is more effective than the transfer matrix method in analyzing an arc with a hinged point at its intermediate.

Key Words : Out-of-plane vibration, Free Vibration, Timoshenko arc, Natural frequency, Influence coefficient

1. 서 론

호는 기계, 항공우주 및 토목 공학 분야에서 사용되는 구조물의 기본 구성 요소로써 널리 사용되고 있다. 호와 같은 곡선 형태를 갖는 구조물의 진동해석은 단순한 직선 형태를 갖는 구조물의

진동해석과는 달리 상대적으로 복잡하고 어렵다. 구조물의 설계 시에 호와 같은 형태를 갖는 구조물의 진동해석은 공학적으로 가치가 높으므로 이러한 구조물을 대상으로 진동해석을 효과적으로 수행하기 위한 다양한 연구가 오늘날까지 많은 연구자들에 의해 진행되어 왔다.

*† 여동준(ORCID:https://orcid.org/0000-0002-4806-2724) :
교수, 전남대학교 기관시스템공학과
E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133
*최명수(ORCID:https://orcid.org/0000-0003-0691-5570) :
교수, 전남대학교 기관시스템공학과
**김명준(ORCID:https://orcid.org/0000-0002-4851-732X) :
대학원생, 전남대학교 기관시스템공학과

*† Dong-Jun Yeo(ORCID:https://orcid.org/0000-0002-4806-2724)
: Professor, Department of Power System Engineering, Chonnam
National University.
E-mail : djyeo@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7133
*Myung-Soo Choi(ORCID:https://orcid.org/0000-0003-0691-5570)
: Professor, Department of Power System Engineering, Chonnam
National University.
**Myung-Jun Kim(ORCID:https://orcid.org/0000-0002-4851-732X)
: Graduate student, Department of Power System Engineering,
Chonnam National University.

호의 진동은 초기 곡률 평면 내에서 이루어지는 진동인 면내 진동과 그 평면과 수직방향의 진동인 면외 진동으로 분류할 수 있다. 호의 면내 진동 해석에 관한 연구¹⁻⁴⁾는 논문과 교재 등을 통해 쉽게 찾아볼 수 있지만, 면외 진동에 관한 연구는 상대적으로 드물다. 곡선 구조물의 면외 진동과 관련된 연구를 살펴보면, Love⁵⁾는 면외 진동을 하는 링의 진동수 방정식을 유도하였고, Takahashi⁶⁾는 회전관성과 전단변형을 고려하지 않는 고전적인 보 이론을 기반으로 호의 면외 진동에 관한 연구를 수행하였다. 그리고 Irie 등⁷⁾은 변단면을 갖는 호의 면외 자유진동 해석에 관한 연구를 수행하였다.

진동해석 시에 회전관성과 전단변형을 고려하지 않으면 계산하여 구한 고유진동수의 정밀도가 떨어지므로, Irie 등⁸⁻⁹⁾은 회전관성과 전단변형을 고려한 티모센코 보 이론과 전달행렬법을 이용하여 호의 면외 자유진동 해석을 수행하였다. Lee 등¹⁰⁾은 회전관성과 전단변형을 고려한 연속 곡선보의 면외 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도한 후 이를 수치적분하고, 반분법을 이용하여 고유진동수를 계산하였다.

이 연구의 저자들은 이전에 전달영향계수법을 이용하여 전단변형과 회전관성을 갖는 티모센코 호의 면내 자유진동 해석에 관한 연구를 수행한 바 있다⁴⁾. 해석 알고리즘이 효과적이기 위해서는 특정 구조물에만 해석이 가능한 것이 아니라 다양한 구조물에 적용이 가능해야 한다. 저자들은 궁극적으로 스프링과 같은 완전한 3차원 곡선형 구조물의 해석을 목표로 연구를 진행 중이다. 따라서 이 연구에서는 기존의 전달영향계수법의 해석 범위를 더욱 확장하기 위하여 티모센코 호의 면외 자유진동 해석에 전달영향계수법을 도입하여 전산 알고리즘을 정식화하고 3가지 계산 모델에 대해 수치 계산을 수행하여 그 신뢰성 및 유효성을 확인하고자 한다.

2. 해석 알고리즘

2.1 모델링

Fig. 1에 나타난 해석 모델은 반경이 R 이고 열

림각(opening angle)이 α 인 일정 단면을 갖는 탄성지지된 호이다. Fig. 1의 x 축과 y 축 방향은 각각 호의 접선과 반경 방향이고, z 축 방향은 x 축과 y 축에 수직이면서 기초를 향하는 방향이다.

호 전체는 다수의 호 요소(Fig. 2 참조)로 분할되고, 이 분할점을 절점이라 한다. 호 전체를 n 개의 호 요소로 분할하면 절점은 총 $n+1$ 개가 존재하며, 첫 번째 절점에서 마지막 절점까지 각 절점을 순차적으로 절점 0, 절점 1, 절점 2, ..., 절점 n 이라고 부른다.

각 절점의 변위벡터($\mathbf{d} = \{\psi \ \phi \ w\}^T$)는 x 축과 y 축 방향의 각변위 ψ 와 ϕ , 그리고 z 축 방향의 변위 w 로 구성되고, 힘벡터($\mathbf{f} = \{T \ M \ Q\}^T$)는 토크 T , 모멘트 M 그리고 전단력 Q 로 구성된다. 그리고 호 요소에 대한 변위 및 힘의 정방향은 Fig. 2에 나타내었다.

절점들은 스프링상수가 k_z 인 z 축 방향의 병진 스프링과 스프링상수가 K_x 와 K_y 인 x 축과 y 축 방향의 회전 스프링으로 기초로부터 지지될 수

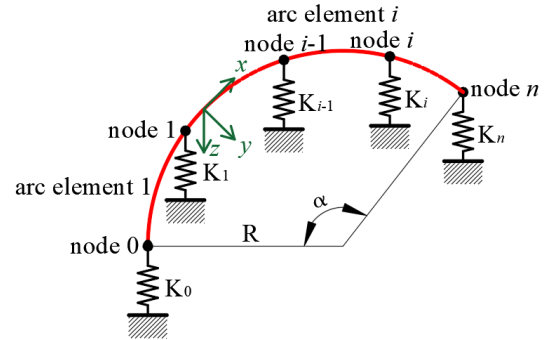


Fig. 1 Analytical model

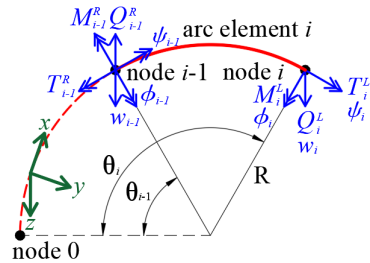


Fig. 2 The i -th arc element

있다. 전달영향계수법에서는 호의 시작단과 끝단의 경계조건을 상기 3방향의 스프링상수(K_x, K_y, k_z)로 모델링한다. 예를 들면, 시작단의 변위가 고정인 경우에는 절점 0의 해당 스프링상수 값을 ∞ 에 상당하는 큰 값으로 고려하고, 끝단의 변위가 자유인 경우에는 절점 n 의 해당 스프링상수 값을 0으로 한다.

2.2 호의 미분 방정식

면의 자유진동을 하는 티모센코 호의 미분방정식은 다음과 같다.¹¹⁾

$$\begin{aligned} d\psi/d\theta &= \phi + (R/GJ)T, \\ d\phi/d\theta &= -\psi + (R/EI)M, \\ dw/d\theta &= -R\phi + (R/\kappa GA)Q, \\ dT/d\theta &= M - \omega^2 \rho I_p R \psi, \\ dM/d\theta &= RQ - T - \omega^2 \rho IR \phi, \\ dQ/d\theta &= -\omega^2 \rho ARw \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 E 와 G 는 호의 종탄성계수와 횡탄성계수이고, A 는 단면적, I 는 단면2차모멘트, I_p 는 극 단면2차모멘트, J 는 비틀림상수, κ 는 전단계수, ρ 는 밀도, ω 는 고유 각진동수이다.

식 (1)을 무차원 상태벡터의 미분 방정식으로 표시하면 다음 식과 같고

$$\frac{d}{d\theta} \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{z}} \quad (2)$$

여기서

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{EI}{GJ} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{EI}{\kappa GAR^2} \\ -\frac{\lambda^2 I_p}{AR^2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda^2 I}{AR^2} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

이고, λ 는 진동수 파라미터($\lambda = \omega R^2 \sqrt{\rho A/EI}$)이다.

해석의 단순화를 고려하여 무차원 변위벡터 ($\bar{\mathbf{d}} = \{\bar{\psi} \ \bar{\phi} \ \bar{w}\}^T$)와 힘 벡터 ($\bar{\mathbf{f}} = \{\bar{T} \ \bar{M} \ \bar{Q}\}^T$)로 구성되는 무차원 상태벡터($\bar{\mathbf{z}} = \{\bar{\mathbf{d}}^T \ \bar{\mathbf{f}}^T\}^T$)를 도입한다.¹¹⁾

2.3 영향계수행렬의 정의 및 전달

임의의 절점 i 의 무차원 변위벡터를 $\bar{\mathbf{d}}_i$ 라고 하고, 절점 i 의 좌측과 우측의 무차원 힘벡터를 각각 $\bar{\mathbf{f}}_i^L$ 와 $\bar{\mathbf{f}}_i^R$ 라고 하면, 이들 벡터 사이의 관계를 다음 식과 같이 정의한다.

$$\bar{\mathbf{d}}_i = \mathbf{T}_i^L \bar{\mathbf{f}}_i^L \quad (4)$$

$$\bar{\mathbf{d}}_i = \mathbf{T}_i^R \bar{\mathbf{f}}_i^R \quad (5)$$

여기서 \mathbf{T}_i^L 및 \mathbf{T}_i^R 는 절점 i 좌측 및 우측의 영향계수행렬이다.

절점 $i-1$ 과 절점 i 사이에 있는 i 번째 호 요소(Fig. 2 참고) 좌우측의 무차원 상태벡터 사이의 관계를 전달행렬(\mathbf{B}_i)을 이용하여 나타내면

$$\bar{\mathbf{z}}_i^L = \mathbf{B}_i \bar{\mathbf{z}}_{i-1}^R \quad (6)$$

로 되고, 식 (2)를 이용하여 풀면 식 (6)의 전달행렬(\mathbf{B}_i)은 다음 식과 같이 멱급수 형태로 유도할 수 있다.¹²⁾

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{I} + (\theta_i - \theta_{i-1})\mathbf{A} + \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \frac{(\theta_i - \theta_{i-1})^4}{4!}\mathbf{A}^4 + \dots \quad (7)$$

여기서 \mathbf{I} 는 6×6 크기를 갖는 단위행렬이다. 식 (6)의 무차원 상태벡터($\bar{\mathbf{z}}$)를 무차원 변위벡터($\bar{\mathbf{d}}$)와 힘벡터($\bar{\mathbf{f}}$) 그리고 전달행렬(\mathbf{B}_i)의 부분행렬 ($\mathbf{P}_i, \mathbf{Q}_i, \mathbf{R}_i, \mathbf{S}_i$)로 표시하면 다음 식과 같다.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_i \\ \bar{\mathbf{f}}_i^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i & \mathbf{Q}_i \\ \mathbf{R}_i & \mathbf{S}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_{i-1} \\ \bar{\mathbf{f}}_{i-1}^R \end{bmatrix} \quad (8)$$

식 (5)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식과 식 (4)를 식 (8)에 대입하여 정리하면 식 (9)와 같이 i 번째 호 요소 좌우측의 영향계수의 전달식을 유도할 수 있고, 이 식을 필드 전달식이라고 부른다.

$$\mathbf{T}_i^L = \mathbf{H}_i \mathbf{G}_i^{-1} \quad (9)$$

여기서

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{P}_i \mathbf{T}_{i-1}^R + \mathbf{Q}_i, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{T}_{i-1}^R + \mathbf{S}_i \quad (10)$$

$(i=2, 3, \dots, n)$

이다.

기초로부터 스프링으로 지지된 절점 i 에서 힘의 평형식은 다음 식과 같고

$$\bar{\mathbf{f}}_i^R = \bar{\mathbf{f}}_i^L + \mathbf{K}_i \bar{\mathbf{d}}_i \quad (11)$$

여기서

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \bar{K}_{xi} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_{yi} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_{zi} \end{bmatrix},$$

$$\bar{K}_{xi} = \frac{R}{EI} K_{xi}, \quad \bar{K}_{yi} = \frac{R}{EI} K_{yi}, \quad \bar{k}_{zi} = \frac{R^3}{EI} k_{zi} \quad (12)$$

이다.

식 (4), (5), (11)을 이용하여 정리하면 식 (13)과 같이 i 번째 절점 좌우측의 영향계수의 전달식을 유도할 수 있고, 이 식을 포인트 전달식이라고 부른다.

$$\mathbf{T}_i^R = \mathbf{T}_i^L (\mathbf{I} + \mathbf{K}_i \mathbf{T}_i^L)^{-1} \quad (13)$$

식 (9)와 식 (13)을 통합하면 식 (14)와 같은 필드-포인트 전달식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{T}_i^R = \mathbf{H}_i \mathbf{W}_i^{-1} \quad (i=2, 3, \dots, n) \quad (14)$$

여기서

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{G}_i + \mathbf{K}_i \mathbf{H}_i \quad (15)$$

이다.

2.4 진동수 방정식

시작단의 경계조건을 절점 0의 스프링상수로 모델링하면, 절점 0 좌측의 힘벡터는 영벡터가 된다. 따라서 절점 0 우측의 힘벡터는 $\bar{\mathbf{f}}_0^R = \mathbf{K}_0 \bar{\mathbf{d}}_0$ 가 되고, 여기에 식 (4), (5), (8), (11)의 i 대신에 0을 대입한 식들을 이용하면 식 (16)과 같이 절점 1 우측의 영향계수행렬(\mathbf{T}_1^R)을 구할 수 있다.

$$\mathbf{T}_1^R = \mathbf{H}_1 \mathbf{W}_1^{-1} \quad (16)$$

여기서

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{G}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{H}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{Q}_1 \mathbf{K}_0, \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{S}_1 \mathbf{K}_0 \quad (17)$$

이다.

따라서 식 (16)을 시작으로 식 (14)의 필드-포인트 전달식을 연속적으로 적용하면 절점 n 우측의 영향계수행렬(\mathbf{T}_n^R)을 구할 수 있다.

식 (5)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식과 식 (8) 및 식 (10)으로부터

$$\bar{\mathbf{d}}_i = \mathbf{H}_i \bar{\mathbf{f}}_{i-1}^R \quad (18)$$

가 되고, 식 (5), (14), (18)의 i 대신에 n 을 대입한 식을 이용하면 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{f}}_n^R = \mathbf{W}_n \bar{\mathbf{f}}_{n-1}^R \quad (19)$$

끝단의 경계조건을 절점 n 의 스프링상수로 모델링하면, 절점 n 우측의 힘벡터($\bar{\mathbf{f}}_n^R$)는 영벡터가 된다. 그리고 절점 $n-1$ 우측의 힘벡터($\bar{\mathbf{f}}_{n-1}^R$)는 영벡터가 아니므로 이를 식 (19)에 적용하면 다음과 같은 진동수 방정식을 유도할 수 있다.

$$|\mathbf{W}_n(\lambda)| = 0 \quad (20)$$

따라서 식 (20)을 만족하는 λ 값이 진동수 파라미터가 된다.

2.5 고유 모드

식 (5)의 i 대신에 $i-1$ 을 대입한 식과 식 (8) 및 식 (10)으로부터 다음 식을 유도할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{d}}_{i-1} = \mathbf{T}_{i-1}^R \mathbf{H}_i^{-1} \bar{\mathbf{d}}_i \quad (i = n, n-1, \dots, 2) \quad (21)$$

식 (20)을 이용하여 고유진동수를 구한 후, 식 (19)로부터 절점 $n-1$ 우측의 힘벡터($\bar{\mathbf{f}}_{n-1}^R$)를 먼저 계산한다. 그리고 식 (18)의 i 대신에 n 을 대입한 식으로부터 절점 n 의 변위벡터($\bar{\mathbf{d}}_n$)를 구할 수 있다. 절점 $n-1$ 부터 절점 1까지의 변위벡터는 식 (21)을 이용하면 순차적으로 모두 계산할 수 있다.

절점 0의 변위벡터는 아래 식 (22)를 이용하면 계산할 수 있다. 식 (22)는 식 (17)과 $\mathbf{T}_0^R = \mathbf{K}_0^{-1}$ 그리고 식 (5)의 i 대신에 0을 대입한 식과 식 (8)의 i 대신에 1을 대입한 식을 이용하여 유도할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{H}_1^{-1} \bar{\mathbf{d}}_1 \quad (22)$$

3. 수치해석 및 고찰

3.1 계산 모델 1

첫 번째 계산 모델은 Irie 등⁸⁾이 제시한 논문에서 사용된 수치 모델로써, 경계조건이 양단 고정이고 사각 단면을 갖는 호이다. 호의 치수 및 물성치는 포와송 비(ν)가 0.3, 전단계수(κ)가 0.85, 세장비($R\sqrt{A/I}$)가 100이다.

경계조건이 양단 고정이므로 전달영향계수법에 서는 계산 모델 1의 첫 번째 절점 및 마지막 절점의 스프링상수(K_x, K_y, k_z) 값이 10^{20} 인 스프링들로 지지되어 있는 것으로 고려하였다.

Table 1에는 호의 열림각(α)이 60° 일 때, 전달 영향계수법(TICM) 및 Irie 등⁸⁾이 전달행렬법으로 구한 1차부터 4차까지의 진동수 파라미터를 제시한다. Table 1을 살펴보면, 2가지 방법으로 계산한 진동수 파라미터가 동일함을 알 수 있다. Table 2와 Table 3은 열림각이 각각 120° 와 180° 일 때

Table 1 The frequency parameters λ of computational model 1 ($\alpha = 60^\circ$)

Order	TICM	Irie ⁸⁾
1	19.40	19.40
2	54.03	54.03
3	105.6	105.6
4	172.8	172.8

Table 2 The frequency parameters λ of computational model 1 ($\alpha = 120^\circ$)

Order	TICM	Irie ⁸⁾
1	4.451	4.451
2	12.83	12.83
3	25.99	25.99
4	43.57	43.57

Table 3 The frequency parameters λ of computational model 1 ($\alpha = 180^\circ$)

Order	TICM	Irie ⁸⁾
1	1.804	1.804
2	5.198	5.198
3	10.92	10.92
4	18.72	18.72

양 방법으로 구한 진동수 파라미터이다. 여기에서도 양 방법의 계산 결과가 일치하였다. 따라서 이 연구에서 제안한 방법인 전달영향계수법의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

Table 1, 2, 3의 결과를 살펴보면, 호의 열림각이 증가할수록 고유진동수와 관련이 깊은 진동수 파라미터가 감소함을 알 수 있다. 이것은 열림각이 증가할수록 호의 길이가 길어지므로 호의 강성은 줄어들고 질량은 늘어나기 때문이다.

3.2 계산 모델 2

두 번째 계산 모델은 Irie 등⁹⁾이 제시한 수치 모델로써, 경계조건이 양단 고정이고 원형 단면을 갖는 호이다. 모델의 포와송 비는 0.3, 전단계수는 0.89, 세장비는 20, 열림각은 120° 이다.

Table 4 The frequency parameters λ of computational model 2

Order	TICM	Irie ⁹⁾
1	4.309	4.309
2	11.80	11.79
3	22.51	22.50
4	23.30	23.30

Table 5 The natural frequencies [Hz] of computational model 3

Order	TICM	Lee ¹⁰⁾
1	120.2	120.0
2	176.8	176.4
3	396.4	394.2
4	490.6	487.0

Table 4에 전달영향계수법(TICM) 및 Irie 등⁹⁾이 전달행렬법으로 구한 1차부터 4차까지의 진동수 파라미터를 제시한다. Table 4를 보면 양 방법의 계산 결과가 거의 동일함을 알 수 있다.

Fig. 3는 전달영향계수법으로 계산 모델 2의 1차부터 4차까지 고유모드를 계산한 결과이다.

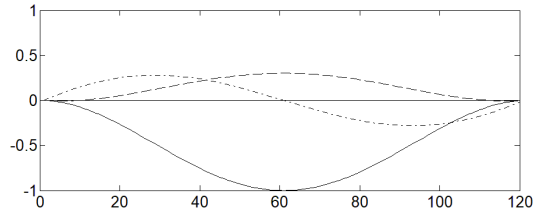
Irie 등⁹⁾이 그들의 논문에서 제시한 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 1차부터 4차까지의 고유모드를 살펴보면, 4차 고유모드에서 비틀림 진동이 지배적임을 알 수 있다.

3.3 계산 모델 3

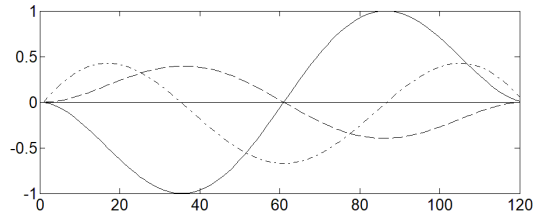
세번째 계산 모델은 Lee 등¹⁰⁾이 그들의 연구에서 제시한 바 있는 수치 모델로써, 경계조건이 양단 고정이고 호의 중앙에 힌지가 존재하는데 이 힌지에서 비틀림각(ψ)과 처짐량(w)은 0이다. 호는 반경(R)이 30 cm, 사각 단면(폭 2.1 cm, 높이 0.135 cm)을 가지며 열림각이 76° , 종탄성계수가 205.8 GPa, 횡탄성계수가 79.15 GPa, 밀도는 7850 kg/m^3 이다.

계산 모델 3의 힌지 부분을 z 축 방향의 병진스프링과 x 축 방향의 회전스프링으로 모델링하고 스프링상수(k_z , K_x) 값에 각각 10^{20} 을 대입하여

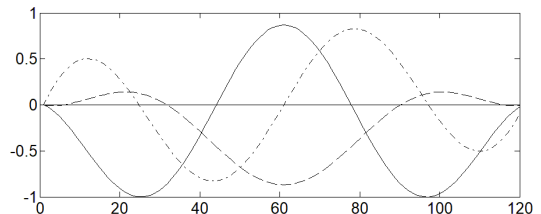
전달영향계수법으로 고유진동수를 계산하였고, 그 결과를 Table 5에 제시한다. 동일 모델에 대한 Lee 등¹⁰⁾의 결과와 비교해 보면 전달영향계수법으로 구한 고유진동수의 신뢰성을 확인할 수 있었다.



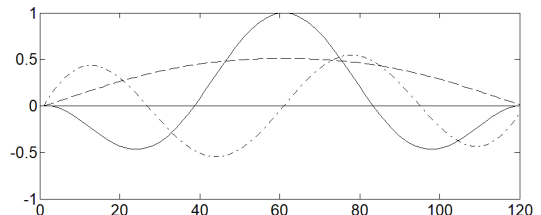
(a) The first natural mode



(b) The second natural mode



(c) The third natural mode



(d) The fourth natural mode

Fig. 3 Natural modes of computational model 2

한편, 저자들은 전달행렬법을 이용하여 호의 면외 자유진동을 해석하는 전산 프로그램을 직접 만들어 상기 계산 모델 1과 2에 대해 적용하여 신뢰성을 확인한 다음, 계산 모델 3의 고유진동수를 구하려고 시도하였으나 계산 모델 3의 고유진동수를 구할 수 없었다. 이것은 구조물의 중간에 경탄성지지가 존재할 경우 일반적인 전달행렬법으로는 해석이 곤란하다는 것을 확인할 수 있었다.

4. 결 론

기계, 항공우주 및 토목 공학 분야에서 사용되는 구조물의 기본 구성 요소인 호를 대상으로 전달영향계수법을 이용하여 탄성지지된 티모센코 호의 면외 자유진동을 해석하였다.

티모센코 호의 양단이 고정이고 열림각이 60° , 120° , 180° 인 계산 모델을 대상으로 전달영향계수법으로 면외 자유진동 해석을 수행하여 구한 고유진동수와 고유 모드는 모두 기존의 전달행렬법의 결과와 잘 일치하였다. 그리고 호의 열림각이 증가할수록 진동수 파라미터가 감소함을 알 수 있었다.

한편, 티모센코 호의 중간에 힌지가 존재하는 모델의 면외 자유진동 해석에서 전달영향계수법은 단순히 적절한 스프링상수의 변경만으로도 쉽게 자유진동 해석이 가능하였지만, 전달행렬법으로는 제대로 해석을 수행할 수 없었다. 따라서 티모센코 호의 중간에 경탄성지지가 존재하는 구조물의 면외 진동해석에서 본 방법의 신뢰성과 유효성을 확인할 수 있었다.

Author contributions

M. S. Choi; Formal analysis, Software, Validation, Writing-original draft, Writing-review & editing. M. J. Kim; Investigation, Data curation. D. J. Yeo; Conceptualization, Methodology, Validation, Writing-original draft, Writing-review & editing, Supervision.

References

1. J. P. Den Hartog. 1928, "The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs", *Philosophical Magazine, Series 7, Vol. 5*, pp. 400-408.
2. T. Irie, G. Yamada and K. Tanaka, 1983, "Natural Frequencies of In-plane Vibration of Arcs", *ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 50*, pp. 449-452.
3. M. S. Choi and D. J. Yeo, 2017, "Free Vibration Analysis of Curved Beams Regarded as Discrete System Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", *Journal of the Korean Society for Power System Engineering, Vol. 21, No. 1*, pp. 37-42. (<https://doi.org/10.9726/kspse.2017.21.1.037>)
4. M. S. Choi and D. J. Yeo, 2017, "Free Vibration Analysis of Timoshenko Arcs with Elastic Supports Using Transfer of Influence Coefficient", *Journal of the Korean Society for Power System Engineering, Vol. 21, No. 2*, pp. 70-76. (<https://doi.org/10.9726/kspse.2017.21.2.070>)
5. A. E. H. Love, 1944, "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity (4th ed.)", Dover Publications, New York, pp. 451-454.
6. S. Takahashi, 1963, "Vibration of a Circular Arc Bar (Perpendicular to its Plane)", *Bulletin of the JSME, Vol. 6, No. 24*, pp. 674-681.
7. T. Irie, G. Yamada and I. Takahashi, 1980, "Out-of-plane Vibration of Arc Bar of Variable Cross-section", *Bulletin of the JSME, Vol. 23, No. 181*, pp. 1200-1205.
8. T. Irie, G. Yamada and K. Tanaka, 1982, "Natural Frequencies of Out-of-Plane Vibration of Arcs", *ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 49*, pp. 910-913.
9. T. Irie, G. Yamada and K. Tanaka, 1982, "Free Out-of-Plane Vibration of Arcs", *ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 49*, pp. 439-441.

10. B. K. Lee, K. K. Park, S. J. Oh and J. M. Mo, 1996, "Free Vibrations of Continuous Curved Beams Considering Rotatory Inertia and Shear Deformation", Magazine and Journal of Korean Society of Steel Construction, Vol. 8, No. 1, pp. 197-206.
11. V. Yildirim, 1997, "A Computer Program for the Free Vibration Analysis of Elastic Arcs", Computers & Structures, Vol. 62, No. 3, pp. 475-485.
12. E. C. Pestel and F. A. Leckie, 1963, "Matrix Methoes in Elastomechanics", McGraw-Hill, New York, pp. 137-138.